矩阵论

第 01 讲
线性空间

课程教材

主要教材：《矩阵论》

西北工业大学出版社 · 2017 年版

具体使用版本以课程要求为准。

前言

- 矩阵理论是一门数学学科，是众多理工学科的重要数学工具。
- 矩阵理论是目前非常活跃的经典数学基础课程。
- 现代科技各个领域处理有限维空间形式与数量相关的强有力工具。
- 矩阵理论有着广泛的应用前景。

发展历程

- 早期矩阵如幻方及拉丁方阵的研究历史悠久，最早的幻方出现于中国的龟背图上，在《九章算术》中也有相关描述。

- 莱布尼兹，首先在 1693 年利用行列式来解题；而加布里尔。克拉默率先利用行列式解决联立线性方程组，在 1750 年引进了克莱姆法则。

- 1800 年著名数学家高斯发明了高斯消去法，以及比较慢的高斯 - 约当消去法。

- 1848 年西尔维斯特率先使用“matrix”这个词。

发展历程

- 英国数学家凯莱（A. Cayley，1821-1895），一般被公认为矩阵论的创立者，因为他首先把矩阵作为一个独立的数学概念提出来。

- 1855 年，埃米特（C. Hermite，1822-1901）证明了别的数学家发现的一些矩阵类的特征根的特殊性质，如现在称为埃米特矩阵的特征根性质等。

- 矩阵论发展史上，弗罗伯纽斯（G.Frobenius，1849-1917）的贡献是不可磨灭的。他讨论了最小多项式问题，以合乎逻辑的形式整理了不变因子和初等因子的理论，并讨论了正交矩阵与合同矩阵的一些重要性质。

发展历程

- 1854 年，约当研究了矩阵化为标准型的问题。

- 1892 年，梅茨勒引进了矩阵的超越函数的概念并将其写成矩阵的幂级数的形式。傅里叶、西尔和彭加勒的著作中还讨论了无限矩阵问题。

矩阵本身所具有的性质依赖于元素的性质，矩阵由最初作为一种工具经过两个多世纪的发展，现在已经成为独立的数学分支：矩阵论。

第一讲　线性空间

一、线性空间的定义及性质

二、线性空间的基与坐标

三、基变换与坐标变换

一、 线性空间的定义及性质

[知识预备]

★ 集合：笼统的说是指一些事物（或者对象）组成的整体。

- 集合的表示：枚举、表达式
- 集合的运算：并（ ∪ ），交（ ∩ ）

另外，集合的“和”（+）：并不是严格意义上集合的运算，因为它限定了集合中元素须有可加性。

一、 线性空间的定义及性质

★ 数域：一种数集，对四则运算封闭（除数不为零）。比如有理数域、实数域（R）和复数域（C）。实数域和复数域是工程上较常用的两个数域。

线性空间是线性代数最基本的概念之一，也是学习现代矩阵论的重要基础。线性空间的概念是某类事物从量的方面的一个抽象。

一、 线性空间的定义及性质

1. 线性空间的定义

设 V 是一个非空集合，其元素用 x，y，z 等表示；K 是一个数域，其元素用 k，l，m 等表示。如果 V 满足 [如下 8 条性质，分两类]

（I）在 V 中定义一个“加法”运算，即当 x，y ∈V 时，有唯一的和 x+y ∈V （封闭性），且加法运算满足下列性质

1. 线性空间的定义及性质

（1）结合律　$x+(y+z)=(x+y)+z$ ；

（2）交换律　$x+y=y+x$ ；

（3）零元律　存在零元素 0 使　$x+0=x$ ；

（4）负元律　对于任一元素 $x\in V$ ，存在一元　素 $y\in V$ ，使 $x+y=0$ ，且称 为 的负元素，记为（ $-x$ ），则有　$x+(-x)=0$ 。

一、 线性空间的定义及性质

（II）在 V 中定义一个“数乘”运算，即当 $x\in V$，$k\in K$ 时，有唯一的 $kx\in V$， （封闭性），且数乘运算满足下列性质：

（5）数因子分配律 $k(x+y)=kx+ky$ ；

（6）分配律 $(k+l)x=kx+lx$ ；

（7）结合律 $k(lx)=(kl)x$ ；

（8）恒等律 $1x=x$ ； [数域中一定有 1]

则称 V 为数域 K 上的线性空间。

一、 线性空间的定义及性质

注意：

（ 1）线性空间不能离开某一数域来定义，因为同一个集合，如果数域不同，该集合构成的线性空间也不同。

（2）两种运算、八条性质数域 中的运算是具体的四则运算，而 V 中所定义的加法运算和数乘运算则可以十分抽象。

（3）除了两种运算和八条性质外，还应注意唯一性、封闭性。唯一性一般较显然，封闭性还需要证明，出现不封闭的情况：集合小、运算本身就不满足。当数域 K 为实数域时， V 就称为实线性空间； K 为复数域， V 就称为复线性空间。

一、 线性空间的定义及性质

例 1. 设 $R^+ = \{$ 全体正实数 $\}$，其“加法”及“数乘”运算定义为：$x \oplus y = xy$，$k \circ x = x^k$ 。证明：R^+ 是实数域 R 上的线性空间。

[证明] 首先需要证明两种运算的唯一性和封闭性

①唯一性和封闭性

唯一性显然

若 $x>0$，$y>0$，$k \in R$，则有 $x \oplus y = xy \in R^+$ ，

$k \circ x = x^k \in R^+$

封闭性得证。

②八条性质

（1） $x \oplus (y \oplus z) = x(yz) = (xy)z = (x \oplus y) \oplus z$

一、 线性空间的定义及性质

（2） $x \oplus y=xy=yx=y \oplus x$

（3） 1 是零元素； $x \oplus 1=x1=x$

（4） $1/x$ 是 x 的负元素； $x \oplus 1/x=x(1/x)=1$(零元素)

（5） $k \circ (x \oplus y) = (xy)^k = (x)^k (y)^k = (k \circ x) \oplus (k \circ y)$

[数因子分配律]

(6) $(k \oplus l) \circ x = (x)^{k \oplus l} = (x)^k (x)^l = k \circ x \oplus l \circ x$ [分配律]

(7) $k \circ (l \circ x) = (x)^{lk} = (x)^{kl} = (k\ l\ ) \circ x$

[结合律]

一、 线性空间的定义及性质

2. 线性空间的性质

定理：线性空间具有如下性质

（1）零元素是唯一的，任一元素的负元素也是唯一的。

（2）如下恒等式成立：

$$0X=0$$

$$(-1)X=-X$$

[证明] （1）采用反证法：

①零元素是唯一的。设存在两个零元素 0_1 和 0_2 ，则由于 0_1 和 0_2 均为零元素，按零元律有

$$0_1+ 0_2 = 0_1= 0_2+0_1 = 0_2$$

[交换律]

所以 $0_1 = 0_2$

即 0_1 和 0_2 相同，与假设相矛盾，故只有一个零元素。

一、 线性空间的定义及性质

②任一元素的负元素也是唯一的。假设 任意 $A \in V$，存在两个负元素 y 和 z ，则根据负元律有

$x+y=0=x+z$

$y=y+0=y+(x+z)=(y+x)+z=z$; [零元律] [结合律] [零元律]

即 y 和 z 相同，故负元素唯一。

(2)

①: 设 $w=0x$，则 $x+w=1x+0x=(1+0)x=x$, [恒等律]

故 $w=o$。

②: 设 $w=(-1)x$，则 $x+w=1x+(-1)x=[1+(-1)]x=0x=o$，

故 $w=-x$。

一、 线性空间的定义及性质

3. 线性相关性

线性空间中相关性概念与线性代数中向量组线性相关性概念类似。

•线性组合：

$$\forall x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_m \in V, c_1, c_2 \mathrm{L}\ c_m \in K$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \mathrm{L}\ + c_m x_m @ \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$$

称为元素组 $x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_m$ 的一个线性组合。

一、 线性空间的定义及性质

•线性表示： V 中某个元素 x 可表示为其中某个元素组的线性组合，则称 x 可由该元素组线性表示。

•线性相关性：如果存在一组不全为零的数 $c_1, c_2 \mathrm{L}\ c_m \in K$，使得对于元素 $x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_m \in V$ 有

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = 0$$

则称元素组 $x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_m$ 线性相关，否则称其线性无关。线性相关性概念是个非常重要的概念，有了线性相关性才有下面的线性空间的维数、基和坐标。

一、 线性空间的定义及性质

3. 线性空间的维数

定义：线性空间 V 中最大线性无关元素组所含元素个数称为 V 的维数，记为 dimV 。
本课程只考虑有限维情况，对于无限维情况不涉及 。

例 2． 全体 m×n 阶实矩阵的集合构成一个实线性空间（对于矩阵加法和数对矩阵的数乘运算），求其维数。

[解] 一个直接的方法就是找一个最大线性无关组，其元素尽可能简单。令 E_{ij} 为这样的一个 m×n 阶矩阵，其（ i， j ）元素为 1 ，其余元素为零。显然，这样的矩阵共有 mn 个，构成一个具有 mn 个元素的线性无关元素组：

一、 线性空间的定义及性质

$$\left\{E_{11},E_{12},\mathrm{L}\ E_{1n};E_{21},E_{22},\mathrm{L}\ E_{2n};\mathrm{L}\ ;E_{m1},E_{m2},\mathrm{L}\ E_{mn}\right\}$$

另一方面，还需说明元素个数最大。对于任意的 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，都可由以上元素组线性表示，

$$A=\sum_{i,j}a_{ij}E_{ij} \qquad \sum_{i,j}a_{ij}E_{ij}+A=0$$

即 $\left\{E_{ij}\,|\,i=1:\ m,j=1:\ n\right\}$ 构成了最大线性无关元素组，所以该空间的维数为 mn 。

二、 线性空间的基与坐标

1. 基的定义

设 V 是数域 K 上的线性空间，$x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_r\ (r \geq 1)$ 是属于 V 的 r 个任意元素，如果它满足

（1）$x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_r$ 线性无关；

（2） V 中任一向量 x 均可由 $x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_r$ 线性表示。

则称为 V 的一个基，并称 $x_1, x_2 \mathrm{L}\ x_r$ 为该基的基元素。

- 基正是 V 中最大线性无关元素组； V 的维数正是基中所含元素的个数。
- 基是不唯一的，但不同的基所含元素个数相等。

二、 线性空间的基与坐标

例 3． 考虑全体复数所形成的集合 C 。如果 K ＝ C （复数域），则该集合对复数加法和复数复数的乘法构成线性空间，其基可取为 1 ，空间维数为 1 ；如果取 K ＝ R （实数域），则该集合对复数加法及实数对复数的数乘构成线性空间，其基可取为 {1, i} ，空间维数为 2 。

二、 线性空间的基与坐标

数域 K	两种运算	基	一般元素	空间类型	维数
复数域 C	（1）复数加法； （2）复数对复数的数乘	{1}	$c = c \cdot 1$	复线性空间	1
实数域 R	（1）复数加法； （2）实数对复数的数乘	{1, i}	$c = a \cdot 1 + b \cdot i$	实线性空间	2

二、 线性空间的基与坐标

2. 坐标的定义

称线性空间 V^n 的一个基 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 为 V^n 的一个坐标系，

$\forall x \in V$ 它在该基下的线性表示为：

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \qquad (\xi_i \in K, x_i \in V, i = 1, 2, \cdots n)$$

则称 $\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n$ 为 x 在该坐标系中的坐标或分量，记为

$$(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)^T$$

二、 线性空间的基与坐标

讨论： （1）一般来说，线性空间及其元素是抽象的对象，不同空间的元素完全可以具有千差万别的类别及性质。但坐标表示却把它们统一了起来，坐标表示把这种差别留给了基和基元素，由坐标所组成的新向量仅由数域中的数表示出来。

（2）更进一步，原本抽象的“加法”及 “数乘”经过坐标表示就演化为向量加法及数对向量的数乘。

1） $$x+y=(\xi_1x_1+\xi_2x_2+\cdots+\xi_nx_n)+(\eta_1x_1+\eta_2x_2+\cdots+\eta_nx_n)$$

$$=(\xi_1+\eta_1)x_1+(\xi_2+\eta_2)x_2+\cdots+(\xi_n+\eta_n)x_n$$

正对应

$$\begin{cases} x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n) \\ y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n) \end{cases} \rightarrow x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n)$$

二、 线性空间的基与坐标

2）
$$kx = k(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n) = (k\xi_1)x_1 + (k\xi_2)x_2 + \cdots + (k\xi_n)x_n$$

$$\rightarrow (k\xi_1, k\xi_2, \cdots, k\xi_n)$$

正对应 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \rightarrow kx = (k\xi_1, k\xi_2, \cdots, k\xi_n)$

3）显然，同一元素在不同坐标系中的坐标是不同的。后面我们还要研究这一变换关系。

三、 基变换与坐标变换

基是不唯一的，因此，需要研究基改变时坐标变换的规律。设 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 是 V^n 的旧基，$y_1, y_2 \cdots y_n$ 是 V^n 的新基，由于两者都是基，所以可以相互线性表示

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_i \qquad i = 1, 2, \cdots n$$

$$[y_1, y_2 \cdots y_n] = [x_1, x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2 \cdots x_n] C$$

其中 C 称为过渡矩阵，上式就给出了基变换关系，可以证明，C 是可逆的。

三、 基变换与坐标变换

设 $x \in V^n$ ，它在旧基下的线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i = [x_1, x_2, \cdots x_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

它在新基下的线性表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' y_i = [y_1, y_2, \cdots y_n] \begin{bmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n' \end{bmatrix}$$

三、 基变换与坐标变换

$$[y_1, y_2, \cdots\ y_n]\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots\ x_n]\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}$$

由于基元素的线性无关性，得到坐标变换关系

$$C\begin{bmatrix}\xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\xi_1' \\ \xi_2' \\ \vdots \\ \xi_n'\end{bmatrix} = C^{-1}\begin{bmatrix}\xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n\end{bmatrix}$$

作业：习题 1.1 ， 3 ， 5 ， 7 ， 9

