矩阵论

第 02 讲
线性子空间与线性变换初步

上讲回顾

第一讲　线性空间

- 线性空间的定义及性质
- 线性空间的基与坐标
- 基变换与坐标变换

线性空间的定义及性质

如果非空集合 V 满足两大类（8 条）性质，称 V 为数域 K 上 的 线性空间 或向量空间



线性空间的基与坐标

- **基的定义**

设 V 是数域 K 上的线性空间，$x_1, x_2 \cdots x_r (r \geq 1)$ 是属于 V 的 r 个任意元素，如果它满足

（1） $x_1, x_2 \cdots x_r$ 线性无关；

（2） V 中任一向量 x 均可由 $x_1, x_2 \cdots x_r$ 线性表示。

则称 为 V 的一个基，并称 $x_1, x_2 \cdots x_r$ 为该基的基元素。

- **坐标的定义**

称线性空间 V^n 的一个基 $x_1, x_2 \cdots x_r$ 为 V^n 的一个坐标系，

$\forall x \in V$ 它在该基下的线性表示为：

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i \qquad (\xi_i \in K, x_i \in V, i = 1, 2, \mathrm{L}\ n)$$

- 同一元素在不同坐标系中的坐标是不同的
- 基是不唯一的
- 研究基改变时坐标变换的规律

$$[y_1, y_2 \cdots y_n] = [x_1, x_2 \cdots x_n] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2 \cdots x_n] C$$

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

3. 判别下列集合对所指运算是否构成 **R** 上的线性空间．

（1） 次数等于 m （$m \geq 1$）的实系数多项式的集合，对于多项式的加法和数与多项式的乘法；

否。反例：加法不封闭

$$V = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p = m \}$$

$$p(x) = x^m, \qquad q(x) = -x^m$$

$$p(x) + q(x) = 0 \qquad 0 \notin V$$

零多项式的次数并不是 m，因此 0 不属于这个集合。对加法不封闭，因此不是线性空间

还可以从“零向量”角度看：任何线性空间都必须包含零元素，但本集合本身就不含零多项式。

这里“次数 ⩽ m”的多项式集合才是线性空间；“次数 = m”不是。

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

（2）实对称矩阵的集合，对于矩阵的加法和实数与矩阵的乘法；

是。

$$S=\left\{ \boldsymbol{A}\in \mathbb{R}^{n\times n}:\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A} \right\}$$

① 对加法封闭

$$(A+B)^{T}=A^{T}+B^{T}=A+B$$

② 对实数数乘封闭

$$(kA)^{T}=kA^{T}=kA$$

因为 S 是已知线性空间$\mathbb{R}^{n\times n}$ 的非空子集，而且对加法、数乘封闭。

因此它是 $\mathbb{R}^{n\times n}$的线性子空间，其他线性空间公理直接从矩阵空间继承。

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

(3) 平面上全体向量的集合，对于通常的加法和如下定义的数乘运算 $\circ$ $x = 0$.

否。

(恒等律)

线性空间的数乘必须满足单位元性质： $1 \cdot x = x$

当 $x \neq 0$ 时 $1 \circ x = 0 \neq x,$ $x \neq 0$

判断“不是”时，找到这一条失败即可，无需继续检查其他公理。

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

5. 求第 3 题之（2）中线性空间的维数与基（实对称矩阵的集合）

$$V=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A^T=A\}$$

先看“一个对称矩阵真正有多少个可以独立选择的元素”，再据此构造基。

- 对角元 $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ 可以独立选择。
- 上三角中的 a_{ij} $(i<j)$ 可以独立选择，而下三角 a_{ji} 必须等于 a_{ij}。
- 因此，自由参数 = “n 个对角元” + “上三角非对角元的个数”。

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}+E_{21}, E_{13}+E_{31}, E_{23}+E_{32}$$

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

记 E_{ij} 为第 i 行第 j 列为 1、其余元素全为 0 的 n 阶矩阵。

$$E_{ij}=(e_{kl}),\qquad e_{kl}=\begin{cases}1, & k=i,\ l=j,\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

对于对称矩阵，需要两类候选基矩阵：

$$F_{ij}=E_{ij}+E_{ji},\qquad 1\le i<j\le n$$

$$E_{ii},\qquad i=1,2,\cdots,n$$

任取 $A=(a_{ij})_{n\times n}\in V$，因为 A 对称，所以 $a_{ij}=a_{ji}$

$$A=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}E_{ii}+\sum_{i<j}a_{ij}F_{ij}$$

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

该线性空间的一个基由两部分组成：

$\{E_{ii} : 1 \le i \le n\}$　　$\{F_{ij} : 1 \le i < j \le n\}$

共 n 个　　n(n−1)/2 个

所以基矩阵总数为：

$$n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$$

因此

$$\dim V = n(n+1)/2$$

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

7. 求 $P_2[t]$ 中向量 $1 + t + t^2$ 在基 $1, t - 1, (t - 2)(t - 1)$ 下的坐标。

把同一个多项式写成“给定基”的线性组合，组合系数就是坐标。

$$1+t+t^2 = k_1 \cdot 1 + k_2(t-1) + k_3(t-2)(t-1)$$

下面只需要求出 k_1，k_2，k_3。

$$\begin{cases} k_1 - k_2 + 2k_3 = 1, \\ k_2 - 3k_3 = 1, \\ k_3 = 1. \end{cases}$$

求解得 $k_3=1$，$k_2=4$，$k_1=3$。

因此，$1+t+t^2$ 的坐标为 $(3, 4, 1)^T$。

（坐标的顺序必须与题目给出的基的顺序一致）

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

9. 在 R^4 中有两个基 $x_1=e_1$，$x_2=e_2$，$x_3=e_3$，$x_4=e_4$

$y_1=(2,1,-1,1)$，$y_2=(0,3,1,0)$，$y_3=(5,3,2,1)$，$y_4=(6,6,1,3)$

① 由前一基改变为后一基的过渡矩阵 C

② 向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ 在后一基下的坐标

③ 对两个基有相同坐标的非零向量

基变换
坐标变换
相同坐标向量

(1) 求过渡矩阵 C

定义 $(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)C$

因为前一组基就是标准基，所以 y_j 在前一基下的坐标，就是 y_j 本身的四个分量。

因此，把 y_1,y_2,y_3,y_4 的坐标列向量依次作为 C 的各列：

$$C=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

（2）向量在后一基下的坐标

$[x]_x = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)^T$　而后一基下的坐标记为　$[x]_y = \eta$

由同一个向量的两种表示：

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)[x]_x=(y_1,y_2,y_3,y_4)[x]_y$$

再利用 $(y_1,y_2,y_3,y_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)C$ ：

$$[x]_x = C[x]_y$$

$$[x]_y = C^{-1}[x]_x$$

基怎么变，坐标反着变

上讲作业：习题 1.1，3、5、7、9

（3）求在两组基下坐标相同的非零向量

设这个“相同的坐标列向量”为 α。则 $\alpha = C^{-1}\alpha$

等价地 $(C-I)\alpha=0$

解这个齐次方程组，得到通解

$\alpha = k(1,1,1,-1)^T$， $k\neq 0$

因此对应的向量为

$x = k(x_1+x_2+x_3-x_4)$ $k\neq 0$

上讲习题

- 设 V 是形如 $x=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & x\end{bmatrix}$ 的 2×2 实矩阵组成的集合。定义

$x+y=\begin{bmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，以及 $cx=\begin{bmatrix}1 & cx\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 证明 V 是实向量空间。

V 中的零向量是？ –x 是?

第二讲　线性子空间及线性变换初步

一、线性子空间的定义及其性质
二、子空间的交与和
′　子空间的直和
′　线性变换及其运算

1. 定义：设 V1 是数域 K 上的线性空间 V 的一个非空子集合，且对 V 已有的线性运算满足以下条件

如果 $x, y \in V1$，则 $x + y \in V1$；

如果 $x \in V1$，$k \in K$，则 $kx \in V1$，

则称 V1 是 V 的一个线性子空间或子空间。

性质：（1）线性子空间 V1 与线性空间 V 享有共同的零元素；

线性空间具有如下性质
如下恒等式成立：　　$0X=0$　，$(-1)X=-X$

[证明] $\forall x \in V_1$　　$Q x \in V_1 \subset V$

（1） $0x=0$, $0x \in V1$ （或利用零元素的唯一性）
V 中的零元素也在 V1 中，V1 与 V 享有共同的零元素。

（2）
（-1） $x=(-x)$ ，$(-1)x \in V1$ ； 封闭性
V1 中元素的负元素仍在 V1 中

分类：子空间可分为平凡子空间和非平凡子空间

- 平凡子空间：{0}和V本身
- 非平凡子空间：除以上两类子空间

- 线性子空间仍为线性空间
- 维数、基和坐标等概念可应用到线性子空间
- 零子空间不含任何线性无关的向量
- 没有基维数为零（零子空间没有基、规定维数为零）

4. 生成子空间：设 x1，x2，…，xm 为 V 中的元素，它们的所有线性组合的集合

$$\left\{\sum_{i=1}^{m} k_i x_i \mid k_i \in K, i = 1,2\cdots m\right\}$$

也是 V 的线性子空间，称为由 x1，x2，…，xm 生（张）成的子空间，记为 L(x1，x2，…，xm) 或者 Span(x1，x2，…，xm)。

•若 x1，x2，…，xm 线性无关，则 dim{L(x1，x2，…，xm)}=m

两个特殊子空间——矩阵的值域

定义：设 $A \in R^{m \times n}$，以 a_i 表示 A 的第 i 个列向量，称子空间 $L(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ 为矩阵 A 的值域（列空间），记为：$R(A) = L(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$

$R(A)=\{Ax \mid x \in R^n\}$

$R(A) \in R^m$

$\text{rank}(A) = \dim(R(A)) = \dim(R(A^T))$

矩阵 A 的秩 = 矩阵值域的维数

两个特殊子空间——矩阵的核空间（零空间）

定义：设 $A \in R^{m \times n}$，称集合 $\{x|Ax=0\}$ 为 A 的核空间（零空间），记为 $N(A) = \{x|Ax=0\}$

$N(A)$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解空间 $N(A)$ 是 R^n 的子空间

定义： A 核空间维度称为 A 的零度，即 $n(A) = \dim N(A)$

5. 基扩定理：设 V1 是数域 K 上的线性空间 Vn 的一个 m 维子空间，x1，x2，…，xm 是 V1 的一个基，则这 m 个基向量必可扩充为 Vn 的一个基；换言之，在 Vn 中必可找到 n-m 个元素 xm+1，xm+2，…，xn，使得 x1，x2，…，xn 成为 Vn 的一个基。这 n-m 个元素必不在 V1 中。

二、子空间的交与和

1. 定义：设 V1 ，V2 是线性空间 V 的两个子空间，则

$$V_1 \cap V_2 = \{ x \mid x \in V_1, x \in V_2 \}$$

$$V_1 + V_2 = \{ x + y \mid x \in V_1, y \in V_2 \}$$

分别称为 V1 和 V2 的交与和。

2. 定理：若 V1 和 V2 是线性空间 V 的两个子空间，则 V1 ∩ V2 ，V1 + V2 均为 V 的子空间

[证明] (1) $\forall x, y \in V_1 \cap V_2$

$x + y \in V_1 \qquad x + y \in V_2$

$\therefore x + y \in V_1 \cap V_2$

$\forall x \in V_1 \cap V_2 \qquad k \in K$

$kx \in V_1 \qquad kx \in V_2$

$\therefore kx \in V_1 \cap V_2 \qquad \therefore V_1 \cap V_2$ **是 V 的一个线性子空间。**

(2) $\forall x_1, x_2 \in V_1 \quad \forall y_1, y_2 \in V_2$

$(x_1 + y_1) \in V_1 + V_2 \qquad (x_2 + y_2) \in V_1 + V_2$

$x = (x_1 + x_2) \in V_1 \qquad y = (y_1 + y_2) \in V_2$

$(x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \in V_1 + V_2$

$\forall k \in K \qquad kx_1 \in V_1 \qquad ky_1 \in V_2$

$k(x_1 + y_1) = kx_1 + ky_1 \in V_1 + V_2$

$\therefore V_1 + V_2$ 是 V 的子空间。

3. 维数公式：若 V1，V2 是线性空间 V 的子空间，则有

$$\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2)=\dim V_1+\dim V_2$$

[证明] 设 $\dim V_1=n_1$, $\dim V_2=n_2$, $\dim(V_1\cap V_2)=m$

需要证明 $\dim(V_1+V_2)=n_1+n_2-m$

设 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 $V_1\cap V_2$ 的一个基，根据基扩定理

存在 (1) $y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-m}\in V_1$，使 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n_1-m}$ 成为 V_1 的一个基；

(2) $z_1, z_2, \cdots, z_{n_2-m}\in V_2$，使 $x_1, x_2, \cdots, x_m, z_1, z_2, \cdots, z_{n_2-m}$ 成为 V_2 的一个基；

•考察 x1，x2，…，xm，y1，y2，…，yn1－m，z1，z2，…，zn2－m，若能证明它为 V1+V2 的一个基，则有 dim(V1+V2)＝n1＋n2－m。

•成为基的两个条件：

1）它可以线性表示 V1+V2 中的任意元素

2）线性无关

显然条件 1）是满足的，现在证明条件 2），采用反证。

假定上述元素组线性相关，则存在一组不全为 0 的数 k1，k2，…，km，p1，p2，…，pn1 − m，q1，q2，…，qn2 − m 使

$$\sum k_i x_i + \sum p_i y_i + \sum q_i z_i = 0$$

$z_1, z_2, \cdots, z_{n2-m} \in V_2$　　$x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n1-m}$ 是 V_1 的一个基

$$z = \sum q_i z_i \in V_2 \qquad \sum k_i x_i + \sum p_i y_i = -z \in V_1 \qquad -z \in V_1 \cap V_2$$

$x_1, x_2, \cdots, x_m$ 是 $V_1 \cap V_2$ 的一个基

$$\sum k_i x_i + \sum p_i y_i = -z = \sum k'_i x_i$$

但是，$x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_{n1-m}$ 是 V_1 的一个基。因此，

$$\therefore p_i = 0$$

$$\therefore p_i = 0$$

$$\sum k_i x_i + \sum p_i y_i + \sum q_i z_i = 0$$

$x_1 \prime x_2 \prime \cdots \prime x_m \prime z_1 \prime z_2 \prime \cdots \prime z_{n2-m}$ 线性不相关

$$q_i = 0 \quad k_i = 0$$

这与假设矛盾，所以上述元素线性无关，可作为 V_1+V_2 的一个基。

所以： $\dim(V_1+V_2) = n_1 + n_2 - m$

三、子空间的直和

1. 定义：设 V_1 、V_2 是线性空间 V 的子空间，若其和空间 V_1+V_2 中的任一元素只能唯一的表示为 V_1 的一个元素与 V_2 的一个元素之和，即 $\forall x \in V_1 + V_2$

存在唯一的 $y \in V_1$ $z \in V_2$

使得 $x = y + z$

则称 $V_1 + V_2$ 为 V_1 与 V_2 的直和，记为 $V_1 \oplus V_2$

子空间的直和并不是一种特殊的和，仍然是

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

反映的是两个子空间的关系特殊。

2. 定理：如下四种表述等价

(1) $V_1 + V_2$ 成为直和 $V_1 \oplus V_2$

(2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

(3) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+ \dim V_2$

(3) $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 为 V_1 的基，$y_1, y_2, \cdots, y_t$ 为 V_2 的基，则 $x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, y_2, \cdots, y_t$ 为 $V_1+ V_2$ 的基.

[证明] （ 2 ）和（ 3 ）的等价性显然

采用循环证法：（ 1 ）→（ 2 ）→（ 4 ）→（ 1 ）

（ 1 ）→（ 2 ）：

已知 $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$

假定 $x \neq 0$ 且 $x \in V_1 \cap V_2$，则 $0 = 0 + 0 = x + (-x)$

$0 \in V_1 + V_2$ $0 \in V_1$ $0 \in V_2$

$x \in V_1$ $-x \in V_2$

说明对 0 元素存在两种分解，这与直和的定义矛盾，
所以假定不成立，在 $V_1 \cap V_2$ 中只能存在 0 元素，
即 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

（2）→（4）：已知 $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

成为基的两个条件：

1）可以线性表示 V_1+V_2 中的任意元素

2）线性无关

$\forall x \in V_1 \quad \forall y \in V_2$ 存在如下坐标表示式

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \qquad y = \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i$$

x+y 可表示 V_1+V_2 中的任一元素，

$x_1 \, ' x_2 \, ' \cdots ' x_s \, ' y_1 \, ' y_2 \, ' \cdots ' y_t$ 可表示 V_1+V_2 中的任意元素。

假设 $x_1, x_2, \cdots, x_s, y_1, y_2, \cdots, y_t$ 线性相关，即存在不全为 0 的 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 使

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i = 0$$

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1 \qquad y = \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i \in V_2 \qquad \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i = -y \in V_2$$

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1 \cap V_2 \qquad \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i = 0 \qquad \xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_s = 0$$

同理： $\eta_1 = \eta_2 = \cdots = \eta_t = 0$

这与其线性相关性矛盾，$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_s \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_t$ 线性无关，所以：$x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_s \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_t$ 可作为 的基

（4）→（1）：已知（4）成立

在 $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_s \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_t$ 这组基下

$\forall x \in V_1 + V_2$ 存在唯一的坐标 $\xi_1, \xi_2, \mathrm{L}, \xi_s, \eta_1, \eta_2, \mathrm{L}, \eta_t$ 使

$$x = \sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i + \sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i$$

$\sum_{i=1}^{s} \xi_i x_i \in V_1$ $\sum_{i=1}^{t} \eta_i y_i \in V_2$ $V_1 + V_2$ 成为直和

小结：

一、 线性子空间的定义及其性质

二、子空间的交与和

三、子空间的直和

线性变换及其运算

- 线性空间是某类客观事物从量的方面的一个抽象
- 线性变换研究线性空间中元素之间的最基本的联系

1 定义：设 V 是数域 K 上的线性空间， T 是 V 到自身的一个映射，使得对于 V 中的任意元素 x 均存在唯一的 y V 与之对应，则称 T 为 V 的一个变换或算子记为

$Tx = y$

称 y 为 x 在变换 T 下的象， x 为 y 的原象。

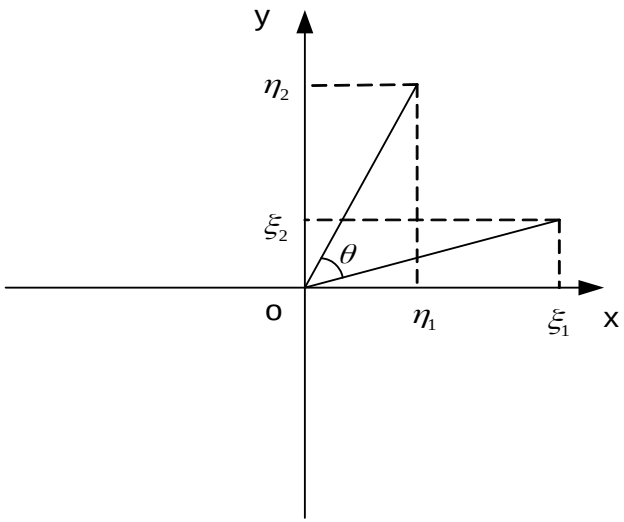
若变化 T 还满足

$T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty) \quad x,y \in V,\ k,l \in K$

称 *T* 为线性变换。

[例 1] 二维实向量空间，将其绕原点旋转 角的操作就是一个线性变换。

$$R^2=\left\{\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\middle|\ \xi_i\in R\right\}$$



证明：

$$x=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\qquad y=Tx=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}\eta_1=\xi_1\cos\theta+\xi_2\sin\theta\\ \eta_2=-\xi_1\sin\theta+\xi_2\cos\theta\end{cases}\qquad \begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{bmatrix}\in R^2$$

可见该操作 T 为变换，下面证明其为线性变换

$$\forall x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in R^2 \qquad k,\ l \in R$$

$$kx+lz=\begin{bmatrix} kx_1 \\ kx_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} lz_1 \\ lz_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} kx_1+lz_1 \\ kx_2+lz_2 \end{bmatrix}$$

$$T(kx+lz)=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx_1+lz_1 \\ kx_2+lz_2 \end{bmatrix}$$

$$=k\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}+l\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

$$=k(Tx)+l(Tz)$$

T 是线性变换。

[例 2] 次数不超过 n 的全体实多项式 Pn 构成实数域上的一个 n+1 维的线性空间，其基可选为 $\{1, x, x^2, L, x^n\}$，微分算子是 Pn 上的一个线性变换。

$$D = \frac{d}{dx}$$

[证明] 显然 D 对 Pn 而言是变换，要证明 D 满足线性变换的条件

$$\forall f, g \in P_n \qquad k, l \in R^2$$

$$D(kf + lg) = k(Df) + l(Dg)$$

D 是 Pn 上的线性变换。

2. 性质

(1) 线性变换把零元素仍变为零元素

(2) 负元素的象为原来元素的象的负元素

(3) 线性变换把线性相关的元素组仍变为线性相关的元素组

[证明] 线性变换 $T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)$

（1） $T(0)=T(0x)=0(Tx)=0$

（2） $T(-x)=(-1)(Tx)=-(Tx)$

（3）元素组 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 线性相关，即存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使

$$\sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0 \quad \text{则：} \quad T\left(\sum_{i=1}^{m} k_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{m} k_i (Tx_i) = T(0) = 0$$

$\{Tx_i\}$ 线性相关。

3. 线性变换的运算

(1) 恒等变换 T_e $\forall x \in V, T_e x = x$

(2) 零变换 T_0 $\forall x \in V, T_0 x = 0$

(3) 变换的相等，T1，T2 是 V 的两个线性变换，若 $\forall x \in V$ 均有 $T_1 x = T_2 x$ ，则称 T1=T2

(4) 线性变换的和 T1+T2，$\forall x \in V$ $(T_1 + T_2)x = T_1 x + T x_2$

(5) 线性变换的数乘 kT $\forall x \in V$ $(kT)x = k(Tx)$

负变换：$(-T)x = -(Tx)$

(6) 线性变换的乘积 $T_1 T_2$ $\forall x \in V$ $(T_1 T_2)x = T_1(T_2 x)$

(7) 逆变换 T^{-1} $\forall x \in V$ ，若存在线性变换 使得 $(ST)x \equiv x$ ，则称 S为 T 的逆变换 $S = T^{-1}$

(8) 线性变换的多项式：$T^n = \underbrace{T T \cdots T}_{n个}$ 并规定 $T^0 = T_e$

$$f(T)=\sum_{n=0}^{N}a_nT^n \quad \rightarrow \quad f(T)x=\sum_{n=0}^{N}a_nT^nx$$

需要说明的是：

1） T_e 也称为单位变换，它的矩阵表示为单位矩阵；

2） T_0 对应的矩阵表示为零矩阵 I ；

3）和矩阵的乘积一样，线性变换的乘积不满足交换律；

4）不是所有的变换都具有逆变换，只有满秩变换才有逆变换，$S,T=T_e$

5）恒等变换、零变换、线性变换的和、乘积多项式及逆变换（若存在）均为线性变换。

作业：习题 1.1 ， 11 、12 、13