矩阵论

第 03 讲

线性变换的矩阵表示

上讲回顾

第二讲　线性子空间及线性变换初步

- 线性子空间的定义及其性质
- 子空间的交与和
- 子空间的直和
- 线性变换及其运算

线性子空间的定义

定义：

V1 是数域 K 上的线性空间 V 的一个非空子集合，对 V 已有的线性运算满足以下条件

（1） 如果 $x,y \in V1$， 则 $x+y \in V1$
（2）如果 $x \in V1$， $k \in K$， 则 $kx \in V1$

则称 V1 是 V 上一个线性子空间或子空间。

线性子空间的性质

- 线性子空间 V1 与线性空间 V 享有共同的零元素
- V1 中元素的负元素仍在 V1 中

- 线性子空间仍为线性空间

- 生成子空间

- 基扩定理

子空间的交与和

设 V1 和 V2 是 V 的两个子空间

$$V_1 \cap V_2 = \{x \mid x \in V_1, x \in V_2\}$$

$$V_1 + V_2 = \{x + y \mid x \in V_1, y \in V_2\}$$

定理:

若 V1 和 V2 分别是线性空间 V 的两个子空间

则 V1∩V2 ， V1+V2 均是 V 的子空间

维数定理

若 V1 和 V2 分别是线性空间 V 的两个子空间

则有 dim(V1+V2)+dim(V1 ∩ V2)=dimV1+dimV2

子空间的直和

•设 V_1、V_2 是线性空间 V 的子空间，若其和空间 V_1+V_2 中的任一元素只能唯一的表示为 V_1 的一个元素与 V_2 的一个元素之和，即 $\forall x \in V_1 + V_2$，存在唯一的 $y \in V_1$、$z \in V_2$，使 $x = y + z$，则称 $V_1 + V_2$ 为 V_1 与 V_2 的直和，记为 $V_1 \oplus V_2$

四种表述等价，循环证明

(1) $V_1 + V_2$ 成为直和 $V_1 \oplus V_2$

(2) $V_1 \cap V_2 = \{0\}$

(3) $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+ \dim V_2$

(3) $x_1、x_2、\cdots、x_s$ 为 V_1 的基，$y_1、y_2、\cdots、y_t$ 为 V_2 的基，则 $x_1、x_2、\cdots、x_s、y_1、y_2、\cdots、y_t$ 为 $V_1+ V_2$ 的基 .

线性变换及其运算

1 定义：设 V 是数域 K 上的线性空间， T 是 V 到自身的一个映射，使得对于 V 中的任意元素 x 均存在唯一的 y ∈ V 与之对应，则称 T 为 V 的一个变换或算子记为

Tx = y

称 y 为 x 在变换 T 下的象， x 为 y 的原象。

若变化 T 还满足

T(kx+ly)=k(Tx)+l(Ty)　　x,y ∈ V, k,l ∈ K

称 *T* 为线性变换。 Tx=y

2． 性质

(1) 线性变换把零元素仍变为零元素

(2) 负元素的象为原来元素的象的负元素

(3) 线性变换把线性相关的元素组仍变为线性相关的元素组

上讲作业：习题 1.1，11、12、13

11. 求 $\mathbf{R}^4$ 的子空间 $V_1 = \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) | \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0\}$

$$V_2 = \{(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4) | \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0\}$$

的交 $V_1 \cap V_2$ 的基。

$\mathbf{V_1}$ 满足第一个方程的所有向量 $\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0$

$\mathbf{V_2}$ 满足第二个方程的所有向量 $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$

交集 $V_1 \cap V_2$ 中的向量，必须同时满足两个方程，得到联立方程组

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4 = 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0 \end{cases}$$

系数矩阵 A：$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

这是一个 2 行 4 列 的齐次线性方程组 $Ax = 0$

未知数有 4 个 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$，方程只有 2 个，所以解空间的维数 4 − Rank(A)。

上讲作业：习题 1.1，11、12、13

对系数矩阵 A 做初等行变换：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad r_2-r_1\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 2\end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}r_2\begin{pmatrix}1 & -0 & 1 & -0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

由行最简形得：$\xi_2 = -\xi_4$，$\xi_1 = -\xi_3$，　　自由变量为 ξ_3, ξ_4，解空间维数2

通解形式：令 $\xi_3 = s, \xi_4 = t$ (s, t 为任意实数)

$$x=\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-s\\ -t\\ s\\ t\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

第一个基向量：　　$\alpha_1 = (1,0,-1,0)^T$

第二个基向量：　　$\alpha_2 = (0,1,0,-1)^T$

上讲作业：习题 1.1，11、12、13

12. 给定 $R^{2\times2}=\left\{A=(a_{ij})_{2\times2}|a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$ 的子集

$V=\left\{A=(a_{ij})_{2\times2}|a_{11}+a_{22}=0,a_{ij}\in\mathbb{R}\right\}$

(1) 证明 V 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的子空间；

(2) 求 V 的维数和基。

(1) 设 $A=(a_{ij})\in V$，$B=(b_{ij})\in V$，则：

验证加法与数乘封闭性

加法封闭 $(a_{11}+b_{11})+(a_{22}+b_{22})=0$

$\Rightarrow A+B\in V$

数乘封闭

$ka_{11}+ka_{22}=k(a_{11}+a_{22})=0$

$\Rightarrow kA\in V$

又零矩阵 $O_{2\times2}\in V$，故 V 对加法和数乘均封闭。

结论：V 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 的子空间。

上讲作业：习题 1.1 ， 11 、12 、13

（2）求 V 的维数和基

构造基向量，确定维数

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

任意 $A \in V$，有 $a_{22} = -a_{11}$，故：$A = a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{21}A_3$

基：$\{ A_1, A_2, A_3 \}$ 维数： $\dim V = 3$

上讲作业：习题 1.1，11、12、13

13． 证明所有二阶矩阵之集合形成的实线性空间，是所有二阶实对称矩阵之集合形成的子空间与所有二阶反对称矩阵之集合形成的子空间的直和⊕

定义 V_1、V_2，证明 $V = V_1 + V_2$

V_1 （对称矩阵） $V_1 = \{A = (a_{ij}) | a_{ij} = a_{ji}\}$

V_2 （反对称矩阵） $V_2 = \{B = (b_{ij}) | b_{ij} = -b_{ji}\}$

任意 $C \in V$，分解为：

$$C = \frac{1}{2}(C + C^T) + \frac{1}{2}(C - C^T)$$

$\frac{1}{2}(C + C^T)$ 是对称矩阵 $\in V_1$　　$\frac{1}{2}(C - C^T)$ 是反对称矩阵 $\in V_2$

结论： $V = V_1 + V_2$ （每个矩阵都能拆成对称部分加反对称部分）

上讲作业：习题 1.1，11、12、13

证明交为零空间

设 $D=(d_{ij})\in V_1\cap V_2$，则 D 同时满足：

$$D\in V_1 \Rightarrow d_{ij}=d_{ji}$$

$$D\in V_2 \Rightarrow d_{ij}=-d_{ji}$$

两式联立：$d_{ij}=-d_{ij}\Rightarrow d_{ij}=0$（对所有 i, j）

因此 $D=O$，即 $V_1\cap V_2=\{O\}$。

综上：$V=V_1\oplus V_2$（直和）

第三讲　线性变换矩阵及其对角化

- 线性变换的矩阵表示
- 线性变换及矩阵的值域和核
- 特征值和特征向量
- 矩阵对角化的充要条件
- 内积空间

线性变换用矩阵表示，将抽象的线性变换转化为具体的矩阵形式。

设 T 是线性空间 V^n 的一个线性变换，且 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ V^n 是 的一个基，$\forall x \in V^n$ ，存在唯一的坐标表示

$$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n$$

$$Tx = T(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \mathrm{L} + \xi_n x_n)$$

$$= {}_1Tx_1 \quad {}_2Tx_2 \quad \cdots \quad {}_nTx_n \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathrm{M} \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$= (Tx_1 \quad Tx_2 \quad \mathrm{L} \quad Tx_n) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathrm{M} \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$= \left[T(x_1 \quad x_2 \quad \mathrm{L} \quad x_n) \right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathrm{M} \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

任一向量 x 的象由基象组 Tx_1， Tx_2， ，Tx 唯一确定

因此，要确定线性变换 T，只需确定基元素在该变换下的象就可以了。

令：
$$Tx_i = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}$$

$$T[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [x_1, x_2, \cdots, x_n] A$$

对于任意元素 x ，在该基下， T 变换后 的坐标表示为

$$Tx = \left[x_1, x_2, \mathbf{L}\ , x_n\right] \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \mathbf{M} \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

同时

$$Tx = \left[T(x_1 \quad x_2 \quad \mathbf{L} \quad x_n)\right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathbf{M} \\ \xi_n \end{bmatrix} = \left[x_1, x_2, \mathbf{L}\ , x_n\right] A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \mathbf{M} \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

对比可知：

对比可知：

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ M \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ M \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

$$x \leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ M \\ \xi_n \end{bmatrix} \qquad Tx \leftrightarrow A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ M \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

1 定义：把 A 称为 T 在基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 下的矩阵。

(1) 恒等变换 T_e 矩阵是单位矩阵 I 矩阵零矩阵 0

(2) 零变换 T_0 矩阵是 kI

(3) x 与 kx 的变换 T_k 是线性变换

2. 定理：设 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 V^n 的一个基，T1、T2 在该基下的矩阵分别为 A、B 。则有

$$(T_1 + T_2)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](A + B)$$

$$kT_1[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](kA)$$

$$(T_1 T_2)[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n](AB)$$

$$T_1^{-1}[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A^{-1}$$

推论 1. 设 $f(t)=\sum_{i=0}^{m} a_i t^i$ 为纯量 t 的 m 次多项式， T 为线性空间 V^n 的一个线性变换，且在 V^n 的基下的矩阵为 A ，则

$$f(T)\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right]=\left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right] f(A)$$

其中

$$f(T)=a_0 T_e + a_1 T + a_2 T^2 + \cdots + a_n T^n$$

$$f(A)=a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots + a_n A^n$$

推论 2． 设线性变换 T 在 V^n 的基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 下的矩阵为 A，元素 x 在该基下的坐标为 $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$，$Tx$ 在该基下的坐标 $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ 满足

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

3. 相似矩阵

设 T 在 V^n 的两个基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 及 $\{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ 的矩阵分别为 A 和 B，且 $[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]C$，则 $B = C^{-1}AC$，即 A 和 B 为相似矩阵。

[证明] 在 V^n 的两个基 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 及 $x_1', x_2', \cdots, x_n'$ 的矩阵分别为 A 和 B

$$T[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A \qquad T[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1', x_2', \cdots, x_n']B$$

$$T[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = T[x_1, x_2, \cdots, x_n]C = [x_1, x_2, \cdots, x_n]AC$$

$$= [x_1', x_2', \cdots, x_n']B = [x_1, x_2, \cdots, x_n]CB \quad \Rightarrow AC = CB$$

$$B = C^{-1}AC$$

•定理： n 阶方阵 A 和 B 相似的充要条件是 A 和 B 为同一线性变换在不同基下的矩阵。

[证明] 必要性：已知 A 和 B 相似，即存在可逆矩阵 P 使

$$B = P^{-1}AP$$

选取一个基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，定义 $T[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]A$

考虑 $[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]P$ 可作为基，且

$$T[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = T[x_1, x_2, \cdots, x_n]P = [x_1, x_2, \cdots, x_n]AP$$

$$= [x_1', x_2', \cdots, x_n']P^{-1}AP = [x_1', x_2', \cdots, x_n']B$$

A 和 B 为同一线性变换在不同基下的矩阵。

充分性的证明由相似矩阵定义的证明给出。

三、线性变换及矩阵的值域和核

•**定义：设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，称**

$$R(T)=\{Tx \mid x\in V^n\}$$ **为 T 的值域** V 中所有向量的象形成的集合

$$N(T)=\{x \mid x\in V^n, Tx=0\}$$ **为 T 的核** V 中所有被 T 变为 0 向量的原象形成的集合

均为 V^n 上的线性子空间

设 A 为 m×n 阶矩阵，称

$$R(A)=\{Ax \mid x\in R^n \text{ or } x\in C^n\}$$ **为矩阵 A 的值域；** 为 R^m（或者 C^m）上的线性子空间

$$N(A)=\{x \mid x\in R^n \text{ or } x\in C^n, Ax=0\}$$ **为 A 的核。** 为 R^n（或者 C^n）上的线性子空间

dimR(T),dimN(T) 称为 T 的秩和零度；

dimR(A),dimN(A) 称为 A 的秩和零度；

定理：

（1） $\dim R(T) + \dim N(T) = \dim V^n = n$

（2） $\dim R(A) = \mathrm{rank}(A)$

（3） $\dim R(A) + \dim N(A) = n$

n 为 A 的列数

若 A 是线性变换 T 的矩阵，则

$\dim R(T) = \dim R(A)$

$\dim N(T) = \dim N(A)$

[证明]：（1）设 $\dim N(T) = r$，$\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$ 是 $N(T)$ 的一组基，则根据基扩定理，可将其扩展为 V^n 的一组基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n\}$，可以证明 $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 是 $R(T)$ 的一组基。

设 $x \in V^n$，$x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n$，则

$$Tx = k_1 Tx_1 + k_2 Tx_2 + \cdots + k_n Tx_n$$

$$Tx_i = O \quad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$\therefore \quad Tx = k_{r+1} Tx_{r+1} + k_{r+2} Tx_{r+2} + \cdots + k_n Tx_n$$

即 $R(T)$ 中的任意元素 Tx 均可由 $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 线性表示。下面证明 $\{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \cdots, Tx_n\}$ 线性无关

设 $\sum_{i=r+1}^{n} l_i T x_i = O$ ， 即 $T\left(\sum_{i=r+1}^{n} l_i x_i\right) =$

则 $\sum_{i=r+1}^{n} l_i x_i \in N(T)$ ， 可用 $\{x_1, x_2, \ , x_r\}$ 线性表示，即：

$$\sum_{i=r+1}^{n} l_i x_i = \sum_{i=1}^{r} p_i x_i$$

$\because \{x_1, x_2, \ , x_r, x_{r+1}, \ , x_n\}$ 线性无关 $\therefore \quad l_i = 0 \quad (i = r+1, \ , n)$

$\therefore \quad \{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \ , Tx_n\}$ 线性无关

$\therefore$

$\therefore \quad \{Tx_{r+1}, Tx_{r+2}, \ , Tx_n\}$ 是 $R(T)$ 的一组基， $\dim R(T) = n - r$

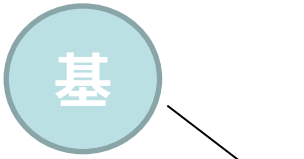
$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim V^n$

（2）由定义知，$R(A)$ 是 A 的列向量所张成的子空间，$\dim R(A)$ 等于列向量组中最大线性无关组中的元素个数，即列向量组的秩，又因为矩阵 A 的秩 rankA 等于列向量组的秩，所以 $\dim R(A) = \mathrm{rank}(A)$

（3） $N(A)$ 是 $Ax=0$ 的解空间，若 rankA=r，则 $\dim N(A) = n - r$

所以 $\dim R(A) + \dim N(A) = n$，$n$ 为 A 的列数。

[证毕]



	元素	坐标向量
加法	元素加法	坐标向量的加法
数乘	数与元素“乘”	数与坐标向量相乘
线性变换及其作用	对应关系	矩阵与坐标列向量的乘积

对任何线性空间，给定基后，我们对元素进行线性变换或线性运算时，只需用元素的坐标向量以及线性变换的矩阵相乘即可，因此，在后面的内容中着重研究矩阵和向量。

对角矩阵的形式比较简单，处理起来较方便，比如求解矩阵方程 $Ax=b$ 时，将矩阵 A 对角化后很容易得到方程的解。对角化的过程实际上是一个去耦的过程。以前我们学习过相似变化对角化。那么，一个方阵是否总可以通过相似变化将其对角化呢？或者对角化需要什么样的条件呢？如果不能对角化，我们还可以做哪些处理使问题变得简单呢？

我们知道，一个矩阵 A 可以看成是一个线性变换在一个基下的矩阵。那么，问是否存在另一个基使得这个线性变换在这个新基下的矩阵是对角矩阵？换言之，矩阵 A 是否与一个对角矩阵相似（通过一个相似变换）。

特征征值与特征向量

定义

设 T 是数域 K 上的线性空间 V^n 的线性变换，且对 K 中某个数 λ_0，存在非零向量 $x \in V^n$，使得

$$\mathbf{Tx = \lambda_0 x}$$

成立，则称 λ_0 为 T 的特征值， x 为 T 的属于 λ_0 的特征向量

若 x 是特征向量
$\mathbf{T(x)=\lambda_0(x)}$,
$\mathbf{T(kx)=\lambda_0(kx)}$

线性变换 —— 数乘

- 特征向量不唯一， x 为 T 的属于 λ_0 的特征向量，则 kx 也是
- 特征向量非零向量

特征征值与特征向量

定义：对 m 阶方阵 A ，若存在数 λ，及非零向量 x （列向量），使得

$Ax = \lambda x$ ，则称 λ 为 A 的特征值， x 为 A 的属于特征值 λ 的特征向量。

- 矩阵 A 的特征向量不唯一
- 矩阵 A 的特征向量非零
- $(\lambda I - A)x = 0$ 有非零解，则 $\det(\lambda I - A) = 0$ ，称 $\det(\lambda I - A)$ 为 A 的多项式。

若 x 是特征向量

$Ax = \lambda_0(x)$, $A(kx) = \lambda_0(kx)$

矩阵乘法 ——数乘

[例 1]　　求 A 其特征值和特征向量。$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$

[解]　$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-1\end{vmatrix}=0$

$$(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$$

$$\lambda_1=\lambda_2=-1 \qquad \lambda_3=5$$

属于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量　$(-I-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=0$$

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=0$$

$$\begin{cases}\xi_1=\xi_1\\ \xi_2=\xi_2\\ \xi_3=-\xi_1-\xi_2\end{cases}$$

可取基础解系为 $x_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ $x_2=\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$

属于 $\lambda=5$ 的特征向量 $(5I-A)x=0$

$$\begin{bmatrix}4&-2&-2\\-2&4&-2\\-2&-2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\xi_3\end{bmatrix}=0 \qquad \xi_1=\xi_2=\xi_3$$

可取基础解系为 $x_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ $\quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\quad x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$k_1x_1 + k_2x$（$k_1, k_2 \in K, k_1, k_2 \neq 0$）是 $\lambda = -1$ 的特征向量

$\lambda_3 = 5$ $\quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

k_3x（$k_3 \in K, k_3 \neq 0$）都是 $\lambda = 5$ 的特征向量

定义

设 T 是数域 K 上的线性空间 V^n 的线性变换， λ_0 为 T 的特征值 , $V_{\lambda_0}=\{x|Tx=\lambda_0 x, x\in V^n\}$ 为 T 的属于 λ_0 的特征子空间 .

$V_{\lambda_0}=\{x|x$ 是 T 的属于 λ_0 的特征向量 $\}$
$\cup\{0\}$

显然 V_{λ_0} 是 V^n 线性子空间

2. 矩阵的迹与行列式

$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 所有对角元素之和

$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad \mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

3. 两个定理

设 A 、B 分别为 m × n 和 n × m 阶矩阵，则

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Sylvester 定理：设 A 、B 分别为 m × n 和 n × m 阶矩阵，则

$$\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - BA)$$

即： AB 与 BA 的特征值只差零特征值的个数，非零特征值相同。

证明：因 $_1$，$_2$，，$_n$ 为矩阵 A 的特征值，则 A 的特征多项式可表示为

$$\lambda I - A = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_n) = \lambda^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

另一方面，因为矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

的展开式中，主对角线上 n 个元素乘积 $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn})$ 是其中一项，而

展开式中的其余各项至多包含 $n-2$ 个主对角线上元素，因而 A 的特征多项式中的 n 次项与 $n-1$ 次项只能在主对角线上 n 个元素乘积中出现，于是

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n A$$

n 阶行列式

$$A = (a_{ij})_{m\times n}$$

$$\det(A) = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$$

$\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$

从第一个元素起，该元素前有几个数比它大，这个元素的逆序就是几。将所有元素的逆序相加，即得到排列的逆序数。

tr(AB) = tr(BA)

证明: (1)

设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}, B=(b_{ij})_{n\times m}$

令 $\mathbf{AB}=(\mathbf{u}_{ij})_{m\times m}, \mathbf{BA}=(\mathbf{v}_{ij})_{n\times n}$, 于是

$$\mathbf{u}_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \mathbf{v}_{ij}=\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj},$$

$$tr(AB)=\sum_{i=1}^{m}\mathbf{u}_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik}\right)=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{v}_{kk}=tr(BA)$$

推论 :$tr(ABC)=tr(CAB)=tr(BCA)$

$$\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - BA)$$

证明： (2)

行列式乘法 $|AB|=|A||B|$，其中 A.B 为同阶方阵

$$\det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I_m - & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ & \lambda I_n \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} \lambda I - & 0 \\ AB & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I & A \\ & \lambda I_n \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} \lambda I_m - & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \det(\lambda I_m - AB)$$

$$\det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & A \\ 0 & \lambda I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & \lambda I_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}$$

$$= \lambda^m \det(\lambda I_n - BA)$$

可得： $\det(\lambda I_n - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA)$

所以： $\det(\lambda I_m - AB) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - BA)$

定理

相似矩阵有相同的迹，有相同的特征多项式和特征值。

证明：设 $A \sim B$，即存在可逆矩阵 P，使得：

$$B = P^{-1}AP$$

于是：

1 $tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(APP^{-1}) = tr(A)$

2 $$|\lambda I - B| = |\lambda I - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda I - A)P| = |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| = |\lambda I - A|$$

定理 任意 n 阶方阵 A 与三角矩阵相似 .

证明：利用数学归纳法

当 $n = 1$ 时，结论成立

假设对于任意 $n-1$ 阶方阵，命题成立

设 $x_1 = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^T$ 为 A 对应于特征值 λ_1 的特征向量

则 $Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n$ 可由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表示

即有：

$$Ax_1 = \lambda_1 x_1$$

且

$$Ax_i = b_{1i}x_1 + b_{2i}x_2 + \cdots + b_{ni}x_n \quad i = 2, \cdots, n$$

由分块矩阵乘法可得

$$A(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令 $P = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 则 P 是可逆矩阵

$$\therefore P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

由归纳假设，存在 $n-1$ 阶可逆矩阵 P_1，使 B 上三角化

令 $Q = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$，则 Q 是可逆矩阵

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{pmatrix}$$

即：

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}^{-1} P^{-1}AP \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha P_1 \\ 0 & P_1^{-1}BP_1 \end{bmatrix}$$

由归纳假设知，$P_1^{-1}BP_1$ 为上三角矩阵，因此：

得证：任意方阵相似于上三角矩阵

即：

$$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \alpha P_1 \\ 0 & P_1^{-1}BP_1 \end{bmatrix}$$

$$A \sim \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & & \\ & \lambda_2 & & * \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理 （**Hamilton-Cayley**）

n 阶矩阵 A 是其特征多项式的矩阵根，即

令: $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$

则有 $\varphi(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I = 0$

证明：A 与三角矩阵相似，即

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ * & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

将 $\phi(\lambda)$ 改写为

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

则 $P^{-1}\phi(A)P = \phi(P^{-1}AP)$

$$= (P^{-1}AP - \lambda_1 I)(P^{-1}AP - \lambda_2 I)\cdots(P^{-1}AP - \lambda_n I)$$

$$= 0$$

因此 $\phi(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1} A + a_n I = 0$ 证毕

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

$\Rightarrow$ $\lambda=0$ 时，$\det(-A)= a_n$

若 A 可逆，则 $\det(-A)= a_n \neq 0$ ，

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n}(A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \cdots)$$

展开带入计算

例 2： 计算矩阵多项式 $\psi(A)=A^{100}+2A^{50}$

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & & \end{bmatrix}$$

思路： $(A) = A^{n} + a\ A^{n-1} + \ + a \qquad A + a$

$I = 0$

$1 \qquad n-1$

$$\psi(A) = \varphi(A)q(A)+r(A) = r(A)$$

详细计算过程见 P53, 例 1.20

定义：首项系数为 1 ，次数最小，且以矩阵 A 为根的 λ 的多项式，称为 A 的最小多项式，用 m(λ) 表示

定理 1： m(λ) 唯一，并且可整除以 A 为根的任意首 1 多

项式定理 2： m(λ) 与特征多项式 φ(λ) 零点相同

定理 3：特征矩阵 λI-A 的全体 n-1 阶子式的最大公因式为 d(λ), 则 m(λ)= φ(λ)/d(λ)

定理 4：如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 A 的互不相同特征值， $x_1, x_1, \ldots, x_s$ 是分别属于它们的特征向量，那么 $x_1, x_1, \ldots, x_s$ 线性无关

定理 5：如果 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 是 A 的不同特征值， $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iri}$ 是属于 λ_i 的线性无关特征向量，那么 $x_1, \ldots, x_{1r1,}, \ldots, x_{k1}, \ldots, x_{krk}$ 线性无关

一、特征值、特征多项式定义、特征子空间定义

二、矩阵的迹与行列式

三、相似矩阵的迹、特征多项式、三角矩阵

四、矩阵多项式

矩阵对角化的充要条件

定理： n 阶方阵 可通过相似变换对角化的充要条件是它具有 n 个线性无关的特征向量。

[证明] 充分性：已知 A 具有 n 个线性无关的特征向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，则 $Ax_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, 2, \cdots, n$

$$A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & \lambda_2 x_2 & \cdots & \lambda_n x_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关，故 $P = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$ 为满秩矩阵，

令 $\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

则有 $AP = P\Lambda$

$P^{-1}AP = \Lambda$

必要性：已知存在可逆方阵 P，使

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & O & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

将 P 写成列向量 $P=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 & L & P_n\end{bmatrix}$ P_n 为 n 维列向量

$$\begin{bmatrix}AP_1 & AP_2 & L & AP_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1P_1 & \lambda_2P_2 & L & \lambda_nP_n\end{bmatrix}$$

可见，λ_i 为 A 的特征值，P_i 为 A 的特征向量，

所以：A 具有 n 个线性无关的特征向量。

推论：设 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 是方阵 A 的 m 个互不相等的特征值，$x_1, x_2, \ldots, x_m$ 依次是与之对应的特征向量，则 $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 线性无关。即 m 阶方阵 A 有 m 个互异的特征值，则必可对角化 。

证 对 s 使用数学归纳法证明之。

当 $s = 1$ 时，因为任一非零向量线性无关，所以定理成立。

假定对 $s-1$ 个互不相同的特征值定理成立，以下证明对 s 个互不相同的特征值定理也成立。

为此令：

$$k_1 x_1 + \cdots + k_{s-1} x_{s-1} + k_s x_s = 0$$

只要证明其中组合系数 $k_i = 0 (i = 1,2,\cdots,s)$ 就行了。因为 $Ax_i = \lambda_i x_i (i = 1,2,\cdots,s)$，用 A 左乘上式，便有：

$$k_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + k_{s-1} \lambda_{s-1} x_{s-1} + k_s \lambda_s x_s = 0$$

$$k_1x_1 + \cdots + k_{s-1}x_{s-1} + k_sx_s = 0$$

$$k_1\lambda_1x_1 + \cdots + k_{s-1}\lambda_{s-1}x_{s-1} + k_s\lambda_sx_s = 0$$

从上面两个等式中消去 x_s，就得：

$$k_1(\lambda_1 - \lambda_s)x_1 + \cdots + k_{s-1}(\lambda_{s-1} - \lambda_s)x_{s-1} = 0$$

根据归纳假定，$x_1, x_2, \cdots, x_{s-1}$ 线性无关，又因为 $\lambda_i - \lambda_s \neq 0(i = 1,2,\cdots,s-1)$，所以 $k_1 = \cdots = k_{s-1} = 0$，从而 $k_s = 0$。

例 3： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值和全部特征向量 .

解: 第一步：写出矩阵 A 的特征方程，求出特征值 .

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 0 \\ -4 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)(\lambda-1)^2 = 0$$

特征值为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$

第二步：对每个特征值 代入齐次线性方程组

$(A-\lambda E)x = 0$, 求非零解。

当 $\lambda_1 = 2$ 时，齐次线性方程组为 $(A - 2E)x = 0$

系数矩阵

$$(A-2E)=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

自由未知量：x_3

$x_1 = x_2 = 0$ 令 $x_3 = 1$ 得基础解系：$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore k_1 p_1 (k_1 \neq 0$ 常数 $)$ 是对应于 $\lambda = 2$ 的全部特征向量。

当 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 时，齐次线性方程组为 $(I - A)x = 0$

$$I - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ 得基础解系 $p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\therefore k_2 p_2 (k_2 \neq 0$ 常数 $)$ 是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的全部特征向量。

结论：n 阶方阵 A 并不一定具有 n 个线性无关的特征向量

3. 不变子空间

定义：如果 T 是线性空间 V 上的线性变换， V_1 是 V 的子空间，并且对
V_1 中任意的元素 x ， Tx 仍在 V_1 中，则称 V_1 是 T 的不变子空间

例子：任何一个子空间都是数乘变换的不变子空间。

线性变换 T 的属于 λ_0 的特征子空间 V_{λ_0} 是 T 的不变子空间

线性变换 T 的值域 R(T) 与核 N （T）都是 T 的不变子空间。

定理：设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，且 V^n 可以分解为 S 个 T 的不变子空间的直和

$$V^n = V_{g_1} \oplus V \oplus \oplus V$$

又在每个不变子空间 V_i 中取基：

$$x_{i1}, x_{i2}, , x_{in_i} \quad (i = 1, 2, , s)$$

把它们合并起来作为 V^n 的基，则 T 在该基下的矩阵为：

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, , A_S)$$

其中 $A_i (i = 1, , s)$ 就是 T 在 V_i 的基下的矩阵。

[证明]：

因为 $V_1, V_2, \ldots, V_s$ 都是 T 的不变子空间，任意 $x_{ij} \in V_i$ 时，

有 $T x_{ij} \in V_i$ （$i=1, 2, \ldots, s; j=1, 2, \ldots, n_i$）

设

$$\begin{cases} Tx_{i1} = a_{11}^{(i)} x_{i1} + a_{21}^{(i)} x_{i2} + \cdots + a_{n_i 1}^{(i)} x_{in_i} \\ Tx_{i2} = a_{12}^{(i)} x_{i1} + a_{22}^{(i)} x_{i2} + \cdots + a_{n_i 2}^{(i)} x_{in_i} \\ \cdots\cdots \\ Tx_{in_i} = a_{1n_i}^{(i)} x_{i1} + a_{2n_i}^{(i)} x_{i2} + \cdots + a_{n_i n_i}^{(i)} x_{in_i} \end{cases}$$

因此 T 在 Vi 基下的矩阵为 $A_i = [a_{ij}^{(i)}]_{n_i \times n_i}$

因此，T 在下的矩阵 $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n_1}, \ldots, x_{s1}, x_{s2}, \ldots, x_{sn_s}$

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ldots, A_S)$$

又在每个不变子空间 V^n 中取基：

$$x_{i1}, x_{i2}, \ , x_{in_i}, (i = 1, 2, \ , S)$$

把它们合并起来作为 V^n 的基，则 T 在该基下的矩阵为：

$$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \ , A_S)$$

其中 $A_i (i = 1, \ , s)$ 就是 T 在 V_i 的基下的矩阵。

推论：线性空间 V^n 的线性变换 T 在 V^n 的某个基下的矩阵 A 为对角矩阵的充要条件是 V^n 可以分解为 n 个 T 的一维特征子空间的直和。

推论： T 是线性空间 V^n 的线性变换，$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 是 T 的全部不同特征值，则 T 在某一个基下的矩阵为对角矩阵的充要条件是

$$\dim V_{\lambda_1} + \dim V_{\lambda_2} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = n$$

小结：

一、对角矩阵存在的充要条件和充分条件

二、不变子空间与准对角矩阵

•Euclid 空间

设 V 是实线性空间（$k \in R$），对于 V 中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个实数与之对应，记为（x,y），若它满足

（1）交换律 $(x,y)=(y,x)$

（2）分配律 $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$

（3） 齐次律 $(kx,y)=k(x,y)$

（4） 非负性 $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$(x,x)=0$

则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积，定义了内积的实线性空间称为 Euclid 空间（或实内积空间）。

•对于一个给定的线性空间，可以定义多种内积，较典型的如三维向量空间的数量积就满足以上四条性质，构成内积。以 n 维向量空间为例：

$$x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\end{bmatrix}^T \qquad y=\begin{bmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{bmatrix}^T$$

可定义内积 $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i\eta_i$

它满足内积的四条性质：

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i\eta_i=\sum_{i=1}^{n} w_i\eta_i\xi_i=(y,x)$$

$$(kx,y)=\sum_{i=1}^{n} w_i(k\xi_i)\eta_i=k\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i\eta_i=k(x,y)$$

$$(x,y+z)=\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i(\eta_i+\varsigma_i)=\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i\eta_i+\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i\varsigma_i=(x,y)+(x,z)$$

$$(x,x)=\sum_{i=1}^{n} w_i\xi_i^2\geq 0$$

当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$

例 1. 在线性空间 R^n 中，对于向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$ $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$

可定义 $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$

则 R^n 就成为一个 Euclid 空间。

例 2. 在闭区间 [a,b] 上的所有连续函数所构成的实线性空间 $\mathbf{C(a,b)}$ 中，对其中任意两个函数 $\boldsymbol{f(x)}, \boldsymbol{g(x)}$ 定义：

$$(f(x), g(x)) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

可以证明它满足内积的四个条件，所以 C(*a*,*b*) 是 Euclid 空间。

性质1 $(x,ky) = k(y,x)$

性质2 $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$

性质3 $\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i, \sum_{j=1}^{n}\eta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j(x_i, y_j)$

证明：

① $(x,ky) = (ky,x) = k(y,x) = k(x,y)$

② $(x,0) = (x,0y) = 0(x,y) = 0$

③ 利用 $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$ 展开计算式 $(kx+y,z) = k(x,z) + (y,z)$

$(x,y+z) = (x,y) + (x,z)$

设 $x_1, x_2, \ , x_n\}$ 是欧氏空间 V_n 的一个基， $x, y \in V$ ，

$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ + \xi_n x_n$， $y = \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \ + \eta_n x_n$ ，则

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j (x_i, x_j) = (\xi_1, \xi_2, \xi_n) \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}$$

其中，

$$A = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \cdots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \cdots & (x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

称 A 为 V^n 对于基 $x_1, x_2, \ , x_n\}$ 的度量矩阵（或 Gram 矩阵）。

度量矩阵

$$A = \begin{bmatrix} (x_1, x_1) & \cdots & (x_1, x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_n, x_1) & \cdots & (x_n, x_n) \end{bmatrix}$$

称 A 为 V^n 对于基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的度量矩阵（或 Gram 矩阵）。

由于 $a_{ij} = (x_i, x_j) = (x_j, x_i) = a_{ji}$ ， A 为对称矩阵对于任意非 0 向量 x ，有 (x,x)>0 ，故 A 为正定矩阵。因此， A 为对称正定矩阵

如果对任何非零向量 x ，都有 $x^T Mx > 0$, 就称 M 为正定矩阵

定义：在欧氏空间 V^n 中，$\sqrt{(x, x)}$ 称为 V 中 x 的长度（或模，范数），记为 $|x|$（或 $\|x\|_2$），即 $|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$

长度为 1 的向量称为单位向量，$x^0 = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x}$ 是一个单位向量，由 x_0 的过程称为单位化

作业：习题 1.2 ， 1 、2 、6 、7