矩阵论

第 04 讲

矩阵对角化与内积空间

上讲回顾

第三讲　线性变换矩阵及对角化

- 线性变换的矩阵表示
- 线性变换及矩阵的值域和核
- 特征值和特征向量
- 矩阵对角化的充要条件
- 内积空间

线性变换的矩阵表示

•线性变换用矩阵表示，将抽象的线性变换转化为具体的矩阵形式。

•设 T 是线性空间 V^n 的一个线性变换，且 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 V^n 的一个基，$\forall x \in V^n$，存在唯一的坐标表示

$$x \leftrightarrow \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \qquad Tx = \left[T(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \left[x_1, x_2, \cdots, x_n\right] A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} \qquad Tx \leftrightarrow A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

•相似矩阵

设 T 在 V^n 的两个基 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 和 $\{x_1', x_2', \cdots, x_n'\}$ 及 的矩阵分别为 A 和 B，且 $[x_1', x_2', \cdots, x_n'] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]\ C$，则 $B = C^{-1}AC$，即 A 和 B 为相似矩阵。

定理： n 阶方阵 A 和 B 相似的充要条件是 A 和 B 为同一线性变换在不同基下的矩阵。

•定义：设 T 是线性空间 V^n 的线性变换，称

$R(T)=\{Tx \mid x\in V^n\}$ 为 T 的值域

$N(T)=\{x \mid x\in V^n, Tx=0\}$ 为 T 的核

设 A 为 m×n 阶矩阵，称

$R(A)=\{Ax \mid x\in R^n \text{ or } x\in C^n\}$ 为矩阵 A 的值域；

$N(A)=\{x \mid x\in R^n \text{ or } x\in C^n, Ax=0\}$ 为 A 的核。

dimR(T),dimN(T) 称为 T 的秩和零度；

dimR(A),dimN(A) 称为 A 的秩和零度；

•定义：对 m 阶方阵 A ，若存在数 l，及非零向量 x （列向量），使得

Ax= lx ，则称 l 为 A 的特征值， x 为 A 的属于特征值 l 的特征向量。特征向量不唯一

- 特征向量非零
- $(\lambda I - A)x = 0$ 有非零解，则 $\det(\lambda I - A) = 0$， 称 $\det(\lambda I - A)$ 为 A 的多项式。

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \qquad trA = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

•定理： n 阶方阵 可通过相似变换对角化的充要条件是它具有 个线性无关的特征向量。

Euclid 空间

设 V 是实线性空间（$k \in R$），对于 V 中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个实数与之对应，记为 (x,y)，若它满足

（1）交换律 $(x,y)=(y,x)$

（2）分配律 $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$

（3）齐次律 $(kx,y)=k(x,y)$

（4）非负性 $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$

则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积，定义了内积的实线性空间称为 Euclid 空间。

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

1.判别下列变换中哪些是线性变换.

(1)在 R^3 中，设 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$T(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1^2,\xi_1+\xi_2,\xi_3)$；

(2) 在矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中，$TX=BXC$，这里 B,C 是给定矩阵；

(3) 在线性空间 $P[x]$ 中，$Tf(t)=f(t+1)$。

① 可加性 $T(\alpha+\beta)=T\alpha+T\beta$　② 齐次性 $T(k\alpha)=k\cdot T\alpha$

(1) 检验齐次性：取 k = 2，计算 T(2x) 与 2T(x)

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，则：$T(2x)=T(2\xi_1,2\xi_2,2\xi_3)=((2\xi_1)^2,(2\xi_1)(2\xi_2),2\xi_3)$

$=(4\xi_1^2,4\xi_1\xi_2,2\xi_3)$

$2T(x)=2(\xi_1^2,\xi_1\xi_2,\xi_3)=(2\xi_1^2,2\xi_1\xi_2,2\xi_3)$

当 $\xi_1\neq 0$ 时，$4\xi_1^2\neq 2\xi_1^2$，即 $T(2x)\neq 2T(x)$

齐次性不成立，该变换不是线性变换。

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

(2) 在矩阵空间 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中，$TX = BXC$，这里 B, C 是给定矩阵

设 $X, Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$，$k \in \mathbb{R}$，分别验证两条：

① 可加性

$$T(X+Y) = B(X+Y)C = BXC + BYC = TX + TY$$

② 齐次性

$$T(kX) = B(kX)C = k(BXC) = k \cdot TX$$

可加性与齐次性均成立，该变换是线性变换。

（矩阵乘法对加法的分配律、数乘与矩阵乘法的可交换性）

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

(3) 在线性空间 $P[x]$ 中，$Tf(t) = f(t+1)$。 （多项式空间）

设 $f(t), g(t) \in P[x]$，$k \in \mathbb{R}$，分别验证两条：

① 可加性

$$T[f(t)+g(t)] = (f+g)(t+1) = f(t+1) + g(t+1) = Tf(t) + Tg(t)$$

② 齐次性

$$T[kf(t)] = (kf)(t+1) = k \cdot f(t+1) = k \cdot Tf(t)$$

可加性与齐次性均成立，该变换是线性变换。

（把多项式的自变量 t 平移到 t+1，即 " 平移变换“）

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

2. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，设 $x=(\xi_1,\xi_2)$，证明 $T_1x=(\xi_2,-\xi_1)$ 与 $T_2x=(\xi_1,-\xi_2)$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的线性变换，并求 T_1+T_2, T_1T_2, T_2T_1。

证明 T_1 是线性变换：

设 $k,l\in\mathbb{R}, y=(\eta_1,\eta_2)\in\mathbb{R}^2$，则 $kx+ly=(k\xi_1+l\eta_1, k\xi_2+l\eta_2)$。

$$T_1(kx+ly)=(k\xi_2+l\eta_2, -k\xi_1-l\eta_1)$$

$$=k(\xi_2,-\xi_1)+l(\eta_2,-\eta_1)=k\,T_1(x)+l\,T_1(y)$$

所以 T_1 是线性变换。同理可得，T_2 是线性变换。

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

$$T_2 x = (\xi_1, -\xi_2)$$

证明 T_2 是线性变换：

设 $k, l \in \mathbb{R}$, $y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$，则 $kx + ly = (k\xi_1 + l\eta_1,\ k\xi_2 + l\eta_2)$。

$$T_2(kx + ly) = (k\xi_1 + l\eta_1, -k\xi_2 - l\eta_2)$$

$$= k(\xi_1, -\xi_2) + l(\eta_1, -\eta_2) = k\,T_2(x) + l\,T_2(y)$$

所以 T_2 是线性变换。因此，T_1与T_2均 是线性变换。

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

求 $T_1+T_2,\ T_1T_2,\ T_2T_1$　　$T_1x=(\xi_2,-\xi_1)$、$T_2x=(\xi_1,-\xi_2)$

(1) $(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x$　　$=(\xi_2,-\xi_1)+(\xi_1,-\xi_2)=(2\xi_1,-\xi_1-\xi_2)$

(2) $(T_1T_2)x=T_1(T_2x)$　　$=T_1(\xi_1,-\xi_2)=(-\xi_2,-\xi_1)$

(3) $(T_2T_1)x=T_2(T_1x)$　　$=T_2(\xi_2,-\xi_1)=(\xi_2,\xi_1)$

$T_1T_2\neq T_2T_1$（乘法不可交换）

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

6．6

$$x_1 = e^{at}\cos bt,\ x_2 = e^{at}\sin bt,\ x_3 = te^{at}\cos bt$$

$$x_4 = te^{at}\sin bt,\ x_5 = \frac{1}{2}t^2e^{at}\cos bt,\ x_6 = \frac{1}{2}t^2e^{at}\sin bt$$

的所有实系数线性组合构成实数域**R**上的一个六维线性空间 $V^6 = L(x_1, \cdots, x_6)$，求微分变换 D 在基 $x_1, \cdots, x_6$ 下的矩阵。

① 对每个基向量 x_i 求微分 Dx_i；

② 将 Dx_i 表示为 $x_1, \cdots, x_6$ 的线性组合，系数就是矩阵第 i 列；

③ 关键：乘积法则求导，注意 $(e^{at}\cos bt)' = ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt$。

逐个求 Dx_i，并表示为基的线性组合：

① $Dx_1 = ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt = ax_1 - bx_2$

② $Dx_2 = ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt = bx_1 + ax_2$

③ $Dx_3 = e^{at}\cos bt + t(ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt) = x_1 + ax_3 - bx_4$

④ $Dx_4 = e^{at}\sin bt + t(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt) = x_2 + bx_3 + ax_4$

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

⑤ $Dx_5 = te^{at}\cos bt + \frac{1}{2}t^2(ae^{at}\cos bt - be^{at}\sin bt) = x_3 + ax_5 - bx_6$

⑥ $Dx_6 = te^{at}\sin bt + \frac{1}{2}t^2(ae^{at}\sin bt + be^{at}\cos bt) = x_4 + bx_5 + ax_6$

故微分变换 D 在基 $x_1, \cdots, x_6$ 下的矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

7. 已知 $\mathbb{R}^3$ 的线性变换 T 在基 x_1, x_2, x_3 下的矩阵为 A，其中 $x_1 = (-1, 1, 1), x_2 = (1, 0, -1), x_3 = (0, 1, 1)$，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求 T 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵。

① 设基(Ⅰ) = $\{x_1, x_2, x_3\}$，基(Ⅱ) = $\{e_1, e_2, e_3\}$；

② 求过渡矩阵 C，使得 $(e_1, e_2, e_3) = (x_1, x_2, x_3)C$；

③ 相似变换：T 在基(Ⅱ)下的矩阵为 $B = C^{-1}AC$。

写出过渡矩阵 C^{-1}

将 x_1, x_2, x_3 用标准基表示：　　$x_1 = -e_1 + e_2 + e_3$，　$x_2 = e_1 - e_3$，　$x_3 = e_2 + e_3$

故由基 (Ⅱ)→ 基 (Ⅰ) 的过渡矩阵（列坐标）为：

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

上讲作业：习题 1.2，1、2、6、7

第二步：求逆矩阵 $\mathrm{C} = (C^{-1})^{-1}$　　计算得 $|C^{-1}| = -1$，伴随矩阵求逆：

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第三步：相似变换求矩阵 $\mathrm{B} = C^{-1}\mathrm{AC}$

先算 AC：

$$AC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

再左乘 C^{-1}：

$$B = C^{-1}(AC) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

故 T 在标准基 e_1, e_2, e_3 下的矩阵为：

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

第四讲 矩阵对角化

- 内积空间
- 正规矩阵
- 酉对角化

酉空间

设 V 是复线性空间（$k \in C$），对于 V 中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个复数与之对应，记为 (x, y)，若它满足以下，则称 (x, y) 为 x 与 y 的内积，定义了内积的复线性空间称为酉空间（或复内积空间）。

（1）交换律 $(x, y) = \overline{(y, x)}$

（2）分配律 $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$

（3）齐次律 $(kx, y) = k(x, y)$ 或 $(x, ky) = \bar{k}(x, y)$

（4）非负性 $(x, x) \geq 0$，当且仅当 $x = 0$ 时，$(x, x) = 0$

例 3. 在线性空间 C^n 中，对于任意两个向量 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)^T$，$y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)^T$ 可定义

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \bar{\eta}_i$$

则 C^n 就成为一个酉空间。

共轭对称

交换律 $(x, y) = (y, x)$

共轭对称保证了内积非负特性

$$(kx,kx) = k(x,kx) = k(kx, x) = kk(x, x) = k^2(x, x)$$

$$(x, x) > 0$$

$$(kx + ly,z) = (kx,z) + (ly,z) = k(x,z) + l(y,z)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i x_i, \sum_{j=1}^{n}\eta_j y_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j(x_i, y_j) = (\xi_1,\xi_2, \ ,\xi_n)A(\eta_1,\eta_2, \ ,\eta_n)^H$$

内积中，第一个位置是线性的，第二个位置是共轭线性的

以 n 维向量空间为例， A 为厄米（$A^H = A$ ）正定（$x^H Ax > 0$ ）矩阵，

$$(x, y) = x^T A \bar{y} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_i a_{ij} \bar{\eta}_j$$

较常见的比如，$A = \mathrm{diag}[w_1 \quad w_2 \quad \mathrm{L} \quad w_n] \qquad w_i > 0$

最简单：实 $(x, y) = x^T y$

复 $(x, y) = x^T \bar{y}$

正交性

内积性质：柯西－施瓦茨（*Cauchy　Schwarz*）不等式

$$(x, y)^2 \le (x, x)(y, y)$$

证明：

当 $y = 0$ 时，$(x, y) = 0$，$(y, y) = 0$，等式成立

当 $y \neq 0$ 时，作向量 $x + ty, \quad t \in R$

则 $(x + ty, x + ty) \ge 0$

$$(x + ty, x + ty) = (x, x) + 2(x, y)t + (y, y)t^2$$

对于 $(x, x) + 2(x, y)t + (y, y)t^2 \geq 0$

$(x, x) + 2(x, y)t + (y, y)t^2$ 是 t 的二次三项式

且 t^2 的系数 $(y, y) > 0$

因此，以上二次三项式的判别式 (b^2-4ac) 不大于 0，即

$\therefore \quad 4(x, y)^2 - 4(x, x)(y, y) \leq 0$

$\therefore \quad (x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$

当 $x \neq 0$ 且 $y \neq 0$ 时，$0 \leq \frac{(x, y)^2}{(x, x)(y, y)} \leq 1$，$0 \leq \left|\frac{(x, y)}{\|x\|\|y\|}\right| \leq 1$

正交性：若$(x,y)=0$ ，则称 x 与 y 正交，记为 **$x \perp y$** 。

x 与 y 的夹角：$\cos\alpha = \dfrac{(x,y)}{|x||y|}$

α 称为 x 与 y 的夹角。

$$\alpha = \langle x,y \rangle = \arccos\frac{(x,y)}{\|x\|\,\|y\|}, \qquad 0 \le \langle x,y \rangle \le \pi$$

内积性质： 三角不等式

$$|x \quad y| \quad |x| \quad | \quad |$$

证明：

$$y$$

$$|x \quad y|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (y, y) + 2(x, y)$$

$$\leq \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \quad | \quad | \quad | \quad |$$

$$(x, x) + (y, y) + 2(x, x)(y, y) = (x$$

$$|x+y|^2 \leq (x + | \quad | \quad y|)^2, \quad x+y \quad |^2 \geq 0, \quad |x$$

$$+ \quad y \quad | \quad | \quad | \quad | \geq 0$$

$$+ \quad y)^2$$

$$\therefore x+y \quad \leq \quad x + \quad y$$

标准正交基与正交化方法

定理 1： 如果 $|x+y|^2 = |x|^2 + |y|^2$ 勾股定理 $x \perp y$，

定理 2： 正交向量组线性无关

定义：欧氏空间 V^n 中， n 个非零正交向量组称为 V^n 的正交基；由单位向量组成的正交基称为标准正交基或法正交基。

定理 3： 任意非零欧氏空间都有正交基和标准正交基。

通过施密特（ Schimidt ）正交化过程可以通过任意基来构造标准正交基

•Gram-Schmidt 正交化手续

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组线性无关的元素或向量，可以进行如下正交归一化操作（正交规范化或正交单位化）：

(1) $y_1 = \dfrac{x_1}{|x_1|}$

(2) $x_2' = x_2 + k_{21} y_1$ k_{21} x_2' 选择合适的使 与 正交，

$$(x_2', y_1) = (x_2, y_1) + k_{21}(y_1, y_1) = 0 \qquad k_{21} = -(x_2, y_1)$$

$$y_2 = \frac{x_2'}{|x_2'|}$$

(3) $x_3' = x_3 + k_{31} y_1 + k_{32} y_2$

选择 k_{31} 、k_{32}使 $x_3^{'}$与 y_1和 y_2均正交

$$(x_3^{'}, y_1) = (x_3^{'}, y_2) = 0$$

$$(x_3^{'}, y_1) = (x_3, y_1) + k_{31} = 0$$

$$\rightarrow k_{31} = -(x_3, y_1)$$

$$(x_3^{'}, y_2) = (x_3, y_2) + k_{32} = 0$$

$$\rightarrow k_{32} = -(x_3, y_2)$$

$$y_3 = \frac{x_3^{'}}{|x_3^{'}|}$$

一般的，

$$x_i' = x_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} y_j \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$k_{ij} = -(x_i, y_j) \qquad y_i = \frac{x_i'}{|x_i'|}$$

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 成为一组正交归一化向量：

$$(y_i, y_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组基元素，则 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 成为标准正交基。

例 4 : 把向量组 x1=(1,1,0,0), x2 =(1,0,1,0), x3 =(-1,0,0,1) , x4 =(1,-1,-1,1) 正交单位化

解: 先正交化

$$y_1' = x_1 = (1,1,0,0)$$

$$y_2' = x_2 - \frac{(x_2, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$$

$$y_3' = x_3 - \frac{(x_3, y_2')}{(y_2', y_2')} y_2' - \frac{(x_3, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)$$

$$y_4' = x_4 - \frac{(x_4, y_3')}{(y_3', y_3')} y_3' - \frac{(x_4, y_2')}{(y_2', y_2')} y_2' - \frac{(x_4, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' = (1, -1, -1, 1)$$

例 4 : 把向量组 **x1=(1,1,0,0), x2 =(1,0,1,0), x3 =(-1,0,0,1) , x4 =(1,-1,-1,1)** 正交单位化

解: 再单位化

$$y_1' = y_1 = (1,1,0,0)$$

$$\frac{y_1}{|y_1|} = \frac{y_1'}{|y_1'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$y_2' = y_2 - \frac{(y_2, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' = (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\frac{y_2}{|y_2|} = \frac{y_2'}{|y_2'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$$

$$y_3' = y_3 - \frac{(y_3, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' - \frac{(y_3, y_2')}{(y_2', y_2')} y_2' = (-1,0,0,1) + \frac{1}{2}(1,1,0,0) - \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$$

$$\frac{y_3}{|y_3|} = \frac{y_3'}{|y_3'|} = \left(\frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{1}{\sqrt{12}}, \frac{3}{\sqrt{12}}\right)$$

$$y_4' = y_4 - \frac{(y_4, y_1')}{(y_1', y_1')} y_1' - \frac{(y_4, y_2')}{(y_2', y_2')} y_2' - \frac{(y_4, y_3')}{(y_3', y_3')} y_3' = (1,-1,-1,1) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) - \frac{1}{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right) - \frac{-1}{\frac{4}{3}}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{y_4}{|y_4|} = \frac{y_4'}{|y_4'|} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

正规矩阵

1. 实对称矩阵与厄米矩阵

实对称矩阵 A： 实矩阵 $A^T = A$
厄米矩阵 A： 复矩阵 $A^H = A$
实反对称矩阵 A： 实矩阵 $A^T = -A$
反厄米矩阵 A： 复矩阵 $A^H = -A$

2． 正交矩阵和酉矩阵

正交矩阵：实矩阵 A　$A^TA=AA^T=I$　　$A^{-1}=A^T$

酉矩阵：复矩阵 A　　$A^HA=AA^H=I$　　$A^{-1}=A^H$

3． 正交相似变换和酉相似变换

P 为正交矩阵， A 为实矩阵，$P^{-1}AP$ 为对 A 的正交相似变换；
P 为酉矩阵， A 为复矩阵，$P^{-1}AP$ 为对 A 的酉相似变换。

4． 正规矩阵

实矩阵 A，若满足$A^TA=AA^T$，则 A 为实正规矩阵；
复矩阵 A，若满足$A^HA=AA^H$，则 A 为复正规矩阵。

显然，实对称矩阵、实反对称矩阵、正交矩阵均为实正规矩阵；厄米矩阵、反厄米矩阵、酉矩阵均为复正规矩阵。

5． 相似矩阵具有相同的特征多项式→ 相同的特征值、迹、行列式。

$$\det(\lambda I - P^{-1}AP) = \det[P^{-1}(\lambda I - A)P]$$

$$= \det(P^{-1})\det(\lambda I - A)\det(P)$$

$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(\lambda I - A)$$

$$= \det(\lambda I - A)$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

二、酉对角化

Schur 引理：设数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，则存在酉矩阵 U，使

$$U^{-1}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

[证明] 设 x_1 是 A 的属于特征值 λ_1 的特征向量，即 $Ax_1=\lambda_1 x_1$，$u_1=\dfrac{x_1}{|x_1|}$，并由其扩充为一组标准正交向量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$

$$u_i^H u_j=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}$$

令 $U_0 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & L & u_n \end{bmatrix}$ 为酉矩阵

$$U_0^H U_0 = \begin{bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \\ M \\ u_n^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & L & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^H u_1 & u_1^H u_2 & L & u_1^H u_n \\ u_2^H u_1 & u_2^H u_2 & L & u_2^H u_n \\ M & M & O & M \\ u_n^H u_1 & u_n^H u_2 & L & u_n^H u_n \end{bmatrix} = I_n$$

对 A 进行酉相似变换：

$$U_0^H A U_0 = \begin{bmatrix} u_1^H \\ u_2^H \\ M \\ u_n^H \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & L & u_n \end{bmatrix} = \left(u_i^H A u_j \right)_{n \times n}$$

第一列：

$$u_i^H A u_1 = u_i^H \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_i^H u_1 = \begin{cases} 0 & i \neq 1 \\ \lambda_1 & i = 1 \end{cases}$$

$$U_0^H A U_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \\ M & (A_1)_{(n-1)\times(n-1)} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$(A_1)_{(n-1)\times(n-1)} = \begin{bmatrix} u_2^H \\ u_3^H \\ M \\ u_n^H \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u_2 & u_3 & L & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_2^H A u_2 & L & u_2^H A u_n \\ M & O & M \\ u_n^H A u_2 & L & u_n^H A u_n \end{bmatrix}$$

相似矩阵具有相同的特征值，因此，对于 A_1 ，其特征值为 λ_2, L, λ_n ，与上相同，可得一个酉矩阵 ，使得

$$U_1^H A_1 U_1 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & \\ M & (A_2)_{(n-2)\times(n-2)} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

依次类推，分别可找到酉矩阵 U_2, U_3, L, U_{n-1} 使

$$U_2^H A_2 U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_3 & * \\ 0 & \\ M & (A_3)_{(n-3)\times(n-3)} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

.....

$$U_{n-2}^H A_{n-2} U_{n-2} = \begin{bmatrix} \lambda_{n-1} & * \\ 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

令

$$U = U_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & U_{n-2} \end{bmatrix}$$

U 是酉矩阵，$U^H U = I$　　$U^H A U = ?$

$$U^H A U = \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & U_{n-2}^H \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} U_0^H A U_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & U_{n-2} \end{bmatrix}$$

$$U_0^H A U_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & U_1^H A_1 U_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \lambda_2 & * \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

……

$$U^H AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & O & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

得证。

•定理： n 阶方阵 A，酉相似于对角阵的充要条件是： A 为正规阵（实或复）。

[证明] 由 Schur 引理：存在酉矩阵 U 使得

$$\Lambda = U^H A U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & t_{ij} \\ & \lambda_2 & \\ & O & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \qquad 1 \le i \le j \le n$$

$\lambda_1, \lambda_2, \mathrm{L}\ , \lambda_n$ 是 A 的特征值。

$$\Lambda^H = (U^H A U)^H = \begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & & 0 \\ & \bar{\lambda}_2 & & \\ & & O & \\ \bar{t}_{ji} & & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$$

充分性：已知 A 为正规阵，即 $A^H A = A A^H$ ，

要证 $t_{ij} = 0$

$$\begin{cases} \Lambda\Lambda^H = U^H A A^H U \\ \Lambda^H \Lambda = U^H A^H A U \end{cases}$$

$$\Lambda\Lambda^H = \Lambda^H \Lambda$$

$$\Lambda^{H}\Lambda=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2 & L & \\ & |\lambda_2|^2 & M \\ M & L & O\end{bmatrix}$$

$$\Lambda\Lambda^{H}=\begin{bmatrix}|\lambda_1|^2+\sum|t_{1j}|^2 & L & \\ & |\lambda_2|^2+\sum|t_{2j}|^2 & M \\ M & L & O\end{bmatrix}$$

由对角元素相等可得

$t_{1j}=0$　　$t_{2j}=0$　　，，　　$t_{nj}=0$

$$t_{ij}=0$$

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & O & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

必要性：已知存在酉矩阵 U

$$U^{H}AU=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & O & \\ 0 & & & \lambda_n\end{bmatrix}=\Lambda$$

使，要证 A 为正规矩阵。

$$\begin{cases} \Lambda\Lambda^H = U^H A A^H U \\ \Lambda^H \Lambda = U^H A^H A U \end{cases}$$

$$\Lambda\Lambda^H = \Lambda^H \Lambda$$

$$(U^H A U)(U^H A^H U) = (U^H A^H U)(U^H A U)$$

$$U^H A A^H U = U^H A^H A U$$

U 可逆

$$A^H A = A A^H$$ [得证]

说明：（1）不能酉对角化的矩阵仍有可能采用其它可逆变换将其对角化，例如

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix} \qquad A^{T}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$AA^{T}\neq A^{T}A$$

A 不是正规矩阵

但 $\lambda(A)=1,3$，两个特征值互异，可以相似变换对角化。可见，A 可以对角化，但不能酉对角化。

（2）实正规矩阵一般不能通过正交相似变换实对角化。（若特征值全为实数，则可正交相似对角化）

如 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

，特征值为 $1\pm 2j$ ，

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$$

正规阵，但不可能对角化。

不能对角化的矩阵一定具有多重特征值，对于不能对角化的矩阵也希望找到某种标准形式，使之尽量接近对角化的形式—Jordan。

作业：习题 1.3 ， 2 ， 4 ， 5 ， 10 ， 11

