矩阵论

第 05 讲
Jordan 标准形

上讲回顾

第四讲　矩阵对角化

- 内积空间
- 正规矩阵
- 酉对角化

Euclid 空间

设 V 是实线性空间（$k \in R$），对于 V 中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个实数与之对应，记为 (x,y)，若它满足

（1）交换律 $(x,y)=(y,x)$

（2）分配律 $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$

（3）齐次律 $(kx,y)=k(x,y)$

（4）非负性 $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时 $(x,x)=0$

则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积，定义了内积的实线性空间称为 Euclid 空间。

酉空间

设 V是复线性空间（$k \in \mathbb{C}$），对于 V 中任何两个元素 x、y 均按某一规则存在一个复数与之对应，记为 (x,y)，若它满足以下，则称 (x,y) 为 x 与 y 的内积，定义了内积的复线性空间称 为酉空间。

（1）交换律 $(x,y)=\overline{(y,x)}$

（2）分配律 $(x,y+z)=(x,y)+(x,z)$

（3）齐次律 $(kx,y)=k(x,y)$ or $(x,ky)=\bar{k}(x,y)$

（4）非负性 $(x,x)\geq 0$，当且仅当 $x=0$ 时，$(x,x)=0$

Gram-Schmidt 正交化手续

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组线性无关的元素或向量，可以进行如下正交归一化操作（正交规范化或正交单位化）：

一般的，

$$x_i' = x_i + \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij} y_j \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$k_{ij} = -(x_i, y_j) \qquad y_i = \frac{x_i'}{|x_i'|}$$

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 成为一组正交归一化向量：

$$(y_i, y_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

若 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为一组基元素，则 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 成为标准正交基。

正规矩阵

1． 实对称矩阵与厄米矩阵

实对称矩阵 A：实矩阵 $A^T = A$
厄米矩阵 A：复矩阵 $A^H = A$
实反对称矩阵 A：实矩阵 $A^T = -A$
反厄米矩阵 A：复矩阵 $A^H = -A$

2． 正交矩阵和酉矩阵

正交矩阵：实矩阵 A $A^T A = AA^T = I$ $A^{-1} = A^T$
酉矩阵：复矩阵 A $A^H A = AA^H = I$ $A^{-1} = A^H$

- **正规矩阵**

  实矩阵 A，若满足$A^{T}A = AA^{T}$，则 A 为实正规矩阵；
  复矩阵 A，若满足$A^{H}A = AA^{H}$，则 A 为复正规矩阵。
  显然，实对称矩阵、实反对称矩阵、正交矩阵均为实正规矩阵；厄米矩阵、反厄米矩阵、酉矩阵均为复正规矩阵。

Schur 引理：设数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，则存在酉矩阵 U，使

$$U^{-1}AU = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

定理： n 阶方阵 A，酉相似于对角阵的充要条件是： A 为正规阵（实或复）。

说明：（1）不能酉对角化的矩阵仍有可能采用其它可逆变换将其对角化，

（2）实正规矩阵一般不能通过正交相似变换实对角化。（若特征值全为实数，则可正交相似对角化）

上讲作业：习题 1.3，2，4，5，10，11

2. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是实线性空间 V^n 的基，向量 $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i x_i$，$y = \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i$，定义实数

$(x, y) = \sum_{i}^{n} i\ \xi_i \eta_i$ 试问：V^n 是否构成欧氏空间?

验证内积的 4 条公理

① 对称性：$(x, y) = (y, x)$

② 齐次性：$(kx, y) = k(x, y)$

③ 线性性：$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

④ 正定性：$(x, x) \geq 0$，且等号当且仅当 $x = 0$

① 对称性：

$$(x, y) = \sum_{i}^{n} i\ \xi_i \eta_i = \sum_{i}^{n} i\ \eta_i \xi_i = (y, x)$$

② 齐次性：

$$(kx, y) = \sum_{i}^{n} i\ (k\xi_i)\eta_i = k \sum_{i}^{n} i\ \xi_i \eta_i = k(x, y)$$

k 是常数，可从求和号中提出，不影响运算性质。

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

③ 线性性：设 $z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$，则

$$(x+y,z)=\sum^{n} i\ (\xi_i+\eta_i)c_i=\sum i\,\xi_i c_i+\sum i\,\eta_i c_i=(x,z)+(y,z)$$

④ 验证正定性

当 $x=0$ 时，$\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_n=0$，故 $\quad (x,x)=\sum^{n} i\ \xi_i^2=0$

当 $x\neq 0$ 时，$\xi_1,\cdots,\xi_n$ 不全为零，故 $\quad (x,x)=\sum^{n} i\ \xi_i^2>0$

(因为 $i\geq 1>0$，且 $\xi_i^2\geq 0$，所以每一项都非负，且至少有一项为正)

结论：(x,y) 满足全部内积公理，V^n 构成欧氏空间。

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

4. 在 $\mathbb{R}^4$ 中，求一单位向量与下列三个向量均正交：$(1,1,-1,1)$，$(1,-1,-1,1)$，$(2,1,1,3)$

设所求向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$，正交即内积为零，得齐次方程组：

$$\begin{cases}\xi_1+\xi_2-\xi_3+\xi_4=0\\ \xi_1-\xi_2-\xi_3+\xi_4=0\\ 2\xi_1+\xi_2+\xi_3+3\xi_4=0\end{cases}$$

解出基础解系，再单位化即可。

求解齐次方程组： 消元求解，得一个非零解：

$$x=(4,0,1,-3)$$

计算模长： $|x|=\sqrt{4^2+0^2+1^2+(-3)^2}=\sqrt{26}$

单位化： $$y=\frac{x}{|x|}=\left(\frac{4}{\sqrt{26}},0,\frac{1}{\sqrt{26}},-\frac{3}{\sqrt{26}}\right)$$

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

5. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 是欧氏空间 V^5 的标准正交基，$V_1 = L(y_1, y_2, y_3)$，其中

$y_1 = x_1 + x_5, \quad y_2 = x_1 - x_2 + x_4, \quad y_3 = 2x_1 + x_2 + x_3$

求 V_1 的一个标准正交基。

施密特正交化 + 单位化

① 验证 y_1, y_2, y_3 线性无关，构成 V_1 的基；

② 施密特正交化：$u_1 = y_1$, $u_2 = y_2 - \frac{(y_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1$, …

③ 单位化：$v_i = u_i / |u_i|$，即得标准正交基。

施密特正交化

第一步：$u_1 = y_1 = x_1 + x_5$

第二步：$u_2 = y_2 - \frac{(y_2, u_1)}{(u_1, u_1)} u_1$

$$(y_2, u_1) = (x_1 - x_2 + x_4, x_1 + x_5) = 1, \quad (u_1, u_1) = 2$$

$$u_2 = y_2 - \frac{1}{2} u_1 = \frac{1}{2} x_1 - x_2 + x_4 - \frac{1}{2} x_5$$

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

第三步：$u_3 = y_3 - \frac{(y_3,u_2)}{(u_2,u_2)}u_2 - \frac{(y_3,u_1)}{(u_1,u_1)}u_1$

$(y_3,u_2) = 0, \quad (y_3,u_1) = 2$

$u_3 = y_3 - 0 \cdot u_2 - 1 \cdot u_1 = x_1 + x_2 + x_3 - x_5$

单位化，得标准正交基

计算各向量模长：

$|u_1| = \sqrt{2}, \quad |u_2| = \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad |u_3| = 2$

单位化：

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_5)$

$v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5)$

$v_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 - x_5)$

（v_1, v_2, v_3 两两正交且均为单位向量，构成 V_1 的标准正交基）

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

10. 设 T 是欧氏空间 V 的线性变换，且对 $x, y \in V$ 有 $(Tx, y) = -(x, Ty)$

则称 T 为反对称变换。证明：T 为反对称变换的充要条件是，

T 在 V 的标准正交基下的矩阵 A 为反对称矩阵，即 $A^T = -A$。

① 必要性：T 是反对称变换 $\Rightarrow A^T = -A$

② 充分性：$A^T = -A \Rightarrow T$ 是反对称变换

必要性：T 是反对称变换 $\Rightarrow A^T = -A$

设标准正交基为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，T 的矩阵为 $A = (a_{ij})_{n\times n}$，则 $Tx_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots + a_{ni}x_n$

由于是标准正交基，内积等于坐标内积，故 $(Tx_i, x_j) = a_{ji}$，且 $(x_i, Tx_j) = a_{ij}$

由反对称变换定义 $(Tx_i, x_j) = -(x_i, Tx_j)$，得 $a_{ji} = -a_{ij}$，即 $A^T = -A$

（标准正交基下，向量内积 = 坐标向量的内积

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

$$(Tx, y) = -(x, Ty)$$

充分性：$A^T = -\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{T}$ 是反对称变换

设 $A^T = -A$，对任意 $x, y \in V^n$，坐标分别为 ξ, η，则　Tx 的坐标为 $A\xi$，Ty 的坐标为 $A\eta$

标准正交基下，内积等于坐标内积，故

$$(Tx, y) = (A\xi)^T\eta = \xi^T A^T \eta$$

$$= \xi^T(-A)\eta = -\xi^T A\eta = -(x, Ty)$$

即 $(Tx, y) = -(x, Ty)$，故 T 是反对称变换。

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

11. 对于下列矩阵A，求正交（酉）矩阵P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

第一步：求特征值。$\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$

$$\lambda_1=\lambda_2=1,\quad \lambda_3=10$$

第二步：求特征向量。对应 $\lambda_1=\lambda_2=1$：

$$x_1=(-2,1,0)^T,\quad x_2=(2,0,1)^T$$

第三步：施密特正交化 + 单位化。正交化得：

$$y_1=(-2,1,0)^T,\quad y_2=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5},1\right)^T$$

（重根对应的特征向量需先正交化，再单位化）

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

单位化 + 正交矩阵 P　单位化 y_1, y_2，并求 $\lambda_3 = 10$ 的特征向量：

$$p_1 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^T$$

$$p_2 = \left(\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)^T$$

$$p_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)^T$$

以 p_1, p_2, p_3 为列，得正交矩阵：

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

使 $P^T AP$ 为对角矩阵：

$$P^T \mathrm{AP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

上讲作业：习题 1.3，2、4、5、10、11

(2) $A=\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

特征值：$\det(\lambda I-A)=\lambda(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2})$　　$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\sqrt{2},\quad \lambda_3=-\sqrt{2}$

特征向量（已单位化）：

$p_1=\left(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

$p_2=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right)^T$

$p_3=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{i}{2},\frac{1}{2}\right)^T$

得酉矩阵：

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

使 $P^H\mathrm{AP}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

第 5 讲 Jordan 标准形

不能对角化的矩阵一定具有多重特征值，对于不能对角化的矩阵也希望找到某种标准形式，使之尽量接近对角化的形式—— Jordan 标准形

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

$$J=\begin{bmatrix}J_1(\lambda_1) & & & 0\\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s(\lambda_s)\end{bmatrix}$$

Jordan 块矩阵

定理： 设 T 是复数域 C 上的线性空间 V^n 的线性变换，任取 V^n 的一个基， T 在该基下的矩阵是 **A** ， T(或 **A**) 的特征多项式可以分解因式为：

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$$

则 V^n 可以分解成不变子空间的直和：

$$V^n = N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_s$$

其中 $N_i = \{x \mid (T - \lambda_i T_e)^{m_i} x = 0, x \in V\}$ 是线性变换 $(T - \lambda_i T_e)^{m_i}$ 的核子空间。

如果给每个子空间 V_i 选一适当的基，由定理 1.27 知，每个子空间的基合并起来即为 V^n 的基，且线性变换 T 在该基下的矩阵为以下形式的准对角矩阵：

$$\boldsymbol{J}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{J}_1(\lambda_1) & & & \\ & \boldsymbol{J}_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{J}_s(\lambda_s)\end{bmatrix}$$

其中 $J_i(\lambda_i)$ 为 m_i 阶 Jordan 块，形如：

$$\boldsymbol{J}_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i\end{bmatrix}_{m_i\times m_i} \qquad (i=1,2,\cdots,s)$$

第 5 讲 Jordan 标准形

Jordan 标准形的存在定理

任何方阵 A 均可通过某一相似变换化为如下 Jordan 标准形：

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & O & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & O & \\ & & O & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Jordan 块矩阵

$\lambda_1,\lambda_2,\mathrm{L}\ ,\lambda_s$ **为 A 的特征值，可以是多重的。**

说明：（1）$J_i(\lambda_i)$ 中的特征值全为 λ_i ，但是对于不同的 i、j ，有可能 λ_i λ_j ，即多重特征值可能对应多个 Jordan 块矩阵。

（2） Jordan 标准形是唯一的，这种唯一性是指：各 Jordan 块矩阵的阶数和对应的特征值是唯一的，但是各 Jordan 块矩阵的位置可以变化。

多项式矩阵（又称为 λ 阵）

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & L & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & L & a_{2n}(\lambda) \\ M & M & L & M \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & L & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为 λ 的多项式矩阵，其中矩阵元素 $a_{ij}(\lambda)$ 为 λ 的多项式。

如果矩阵 B 是数域 K 上的 n 阶矩阵，则 B 的特征矩阵 (λI-B) 就是一个特殊的多项式矩阵。

•多项式矩阵的初等变换

初等变换的目的是为了在保持矩阵原有属性的前提下形式上变得简单。

（1）互换两行（列）
（2）以非零常数乘以某行（列） [这里不能乘以 的多项式或零，（3）这样有可能改变原来矩阵的秩和属性]
（3）将某行（列）乘以 的多项式加到另一行（列）

（允许将一行或一列的多项式倍加到另一行或另一列，但不允许将整行或整列直接乘以非常数多项式）

多项式矩阵的标准形式：采用初等变换可将多项式矩阵化为如下形式：（Smith 标准型）

$$A(\lambda)\rightarrow \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中，多项式 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式（首项系数为 1，即最高幂次项的系数为 1），且 $d_1(\lambda)\,|\,d_2(\lambda)$　$d_2(\lambda)\,|\,d_3(\lambda)$

$d_{r-1}(\lambda)\,|\,d_r(\lambda)$ 即 $d_i(\lambda)$ 是 $d_{i+1}(\lambda)$ 的因式。

(1) 多项式矩阵的**标准形式**不随所采用的初等变换而变，故称 $d_i(\lambda)$ 为**不变因子**。

(2) 不变因子又可采用如下方法求得：设 $D_i(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的所有 i 阶子行列式的最大公因式，则 $d_i(\lambda)=\dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$，$D_0(\lambda)=1$。称为 i 阶行列式因子。

(3) 将每个不变因子化为不可约因式，这些不可约因式称为 $A(\lambda)$ 的**初等因子**，全体初等因子称为初等因子组。例如：

$d_1(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)\rightarrow (\lambda-2)^2$ 和 $(\lambda-3)$

$d_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^5\rightarrow (\lambda-2)^2$ 和 $(\lambda-3)^5$

初等因子组中应包括两个 $(\lambda-2)^2$

（初等因子是不可约多项式的幂）

3. Jordan 标准形的求法

(1) 求出特征矩阵 $(\lambda I - A)$ 的初等因子组，设为 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$。

(2) 写出各 Jordan 块矩阵（一个初等因子对应一个 Jordan 块矩阵）

$$(\lambda - \lambda_i)^{n_i} \rightarrow J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

(3) 合成 Jordan 矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$$

$$(\lambda I-A)\to\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & 0\\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

初等变换法

多项式矩阵标准形式（Smith 标准型）

特征矩阵 $(\lambda I-A)$

行列式因子

$$d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$$

行列式因子法

不变因子 $d_i(\lambda)$

$d_1(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)\to(\lambda-2)^2$和$(\lambda-3)$

$d_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^5\to(\lambda-2)^2$和$(\lambda-3)^5$

初等因子组

Jordan 标准形

$$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}\to J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$$

求 Jordan 标准形——行列式因子法

例：已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

令 $t=\lambda-2$，特征矩阵：

$$M(\lambda)=\lambda I-A=\begin{pmatrix}t & -1 & -1\\ 0 & t & 0\\ 0 & 0 & t\end{pmatrix}$$

计算各阶行列式因子（各阶子式的首一最大公因式）：

① $D_1=1$：一阶子式中含有 -1。

$t \mid 0$

（零多项式可以被任意非零多项式整除）

② $D_2=t$：每个二阶子式都含因子 t，且有一个二阶子式恰为 t。

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ t & 0\end{vmatrix}=t$$

③ $D_3=t^3$： M 。

结论：$D_1=1$，$D_2=t$，$D_3=t^3$。

$D_1 = 1$， $D_2 = t$， $D_3 = t^3$（$t = \lambda - 2$）。

求不变因子：$D_0 = 1$， $d_i = D_i / D_{i-1}$。

$$d_1 = D_1 = 1, \quad d_2 = \frac{D_2}{D_1} = t, \quad d_3 = \frac{D_3}{D_2} = t^2$$

代回 $t = \lambda - 2$，常数 1 不产生初等因子。

初等因子：　$(\lambda-2)$，　$(\lambda-2)^2$

对应 Jordan 块：$J_1(2)$，$J_2(2)$。

所以：
$$J = J_2(2) \oplus J_1(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

初等变换法（求多项式矩阵标准型）

仍令 $t=\lambda-2$。先将非零常数 -1 移到左上角，化成主元 1。

原特征矩阵 M(λ)

$$\begin{bmatrix} t & -1 & -1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{C_1 <\!\!-\!\!> C_2} \begin{bmatrix} -1 & t & -1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \dashrightarrow -R_1} \begin{bmatrix} 1 & -t & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

交换第 1、2 列　　第一行乘 -1

（优先把非零常数变成主元 1，后面就可以用它消去同一行、列的多项式）

当前矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -t & 1 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -t & 1 \\ 0 & t^2 & -t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & -t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}$$

行变换后的矩阵　　列变换后的矩阵

行变换：$R_2 \dashrightarrow R_2 - tR_1$；　　列变换：$C_2 \dashrightarrow C_2 + tC_1$，$C_3 \dashrightarrow C_3 - C_1$。

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & -t \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}$$

行变换： $R_2 \text{—>} R_2+R_3$　　列变换： $C_2 \text{<—>} C_3$　　行变换： $R_2 \text{<—>} R_3$

已得对角形式 $\mathrm{diag}(1, t, t^2)$，且 $1 \mid t \mid t^2$，因此就是 Smith 标准形 （ $t = \lambda-2$ ）

核对：标准型法与前面的行列式因子法得到相同结果。

Smith 标准形：

$$S(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix}$$

不变因子： $d_1=1$， $d_2=t$， $d_3=t^2$。

初等因子： $(\lambda-2)$， $(\lambda-2)^2$。

Jordan 形： $J_2(2) \oplus J_1(2)=$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

方法 1 （行列式因子法）： $D_1=1$， $D_2=t$， $D_3=t^3 \Rightarrow d_1=1$， $d_2=t$， $d_3=t^2$。

方法 2 （初等变换法）： $M(\lambda) \sim \mathrm{diag}(1,t,t^2)$，直接读出相同的不变因子。

第三种求法——特征多项式分析法（秩 + 零度）

仍用同一矩阵 A。通过判断代数重数和几何重数的关系，快速写出 Jordan 矩阵。

已知矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}2&1&1\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

① 求特征多项式：

$$\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-2)^3$$

特征值 2 的代数重数为 3。**即：对应 Jordan 块的阶数之和为 3。**

② 求几何重数：

$$A-2I=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

矩阵 A − 2I 的秩为 1，因此：

$$\dim N(A-2I)=3-\operatorname{rank}(A-2I)=2$$

几何重数为 2，即对应两个 Jordan 块。

③ 确定块大小：总阶数为 3，块数为 2，只能分成 2+1。

$$J=J_2(2)\oplus J_1(2)$$

$$J=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$$

① **代数重数：** $\varphi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3$ 特征值 2 的代数重数为 3。

对应 λ 为 2 的 Jordan 块的阶数之和为 3。

② **几何重数：** 矩阵 A − 2I 的秩为 1，因此：dim N(A − 2I) = 3 − rank(A − 2I) = 2

几何重数为 2，即对应两个 Jordan 块。

对于一个 n 阶方阵 rank(A − 2I) +dim N(A − 2I) = n

求解特征向量 x： (A − 2I) x= 0

rank(A − 2I)	dim N(A − 2I)	Jordan 块个数
3	0	（2 不是特征值， x 只有零解）
2 0 个	1	（只有一个线性无关的特征向量方向，因此只有一个 Jordan 块）
1 1 个	2	（有两个线性无关的特征向量方向，因此有两个 Jordan 块）
0 2 个	3	A − 2I=0， A =2I
3 个		

（这里讨论的是特征值 2 对应的 Jordan 块；假定矩阵为三阶方阵）

代数重数决定总阶数，几何重数决定块数

先看单个 Jordan 块，再推广到由多个 Jordan 块组成的 J。

① 单个属于特征值 λ 的 Jordan 块：

$$J_m(\lambda) - \lambda I_m = N_m, \quad \operatorname{rank}(N_m) = m - 1, \quad \dim N(N_m) = 1$$

N_m 的像空间由 m−1 个线性无关向量张成，故秩为 m−1，零度为 1。

因此，每个属于 λ 的 Jordan 块，对 N(J−λI) 恰好贡献 1 。

其他特征值 $\lambda_i \neq \lambda$ 的块减去 λI 后可逆，对这个核空间贡献 0 维。

② 相似变换不改变秩和零度：

$$A = PJP^{-1} \Rightarrow A - \lambda I = P(J - \lambda I)P^{-1}$$

dim N(A − λI) = dim N(J − λI)

③ 代数重数：

$$\det(\lambda I - J_m(\lambda_i)) = (\lambda - \lambda_i)^m$$

代数重数 = 对应 Jordan 块阶数之和；　　几何重数 = 对应 Jordan 块的个数。

例 1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

初等变换法

1 利用初等变换将特征矩阵化为对角矩阵

2 对角线上非零多项式为 $d_i(\lambda)$

3 由次数大于零的 $d_i(\lambda)$ 的全体不可约因式得到初等因子组

解：

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ 1 & 1 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$C_1 \longrightarrow C_1-(\lambda-3)C_3$，$C_2 \longrightarrow C_2+C_3$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & -2\\ 1-(\lambda-3)^2 & (\lambda-2) & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$R_2 \longrightarrow R_2+2R_1$，$R_3 \longrightarrow R_3-(\lambda-3)R_1$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)(\lambda-4) & (\lambda-2) & 0\end{bmatrix}$$

$R_3 \longrightarrow R_3-R_2$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$C_1 \longrightarrow C_1-2C_2$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -(\lambda-2)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$C_1 \longrightarrow -1\,C_1$，$C_1 \longleftrightarrow C_3$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

多项式矩阵的初等变换

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$$

可见， A 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1$， $d_2(\lambda)=(\lambda-2)$， $d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$

而 A 的初等因子为 $(\lambda-2),\quad (\lambda-2)^2$

故 A 的 Jordan 标准形为 $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

例 1　同题计算——行列式因子法

仍用第 36—37。　　$t = \lambda - 2$，先构造特征矩阵：

$$M(\lambda) = \lambda I - A = \begin{bmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 2 & t+2 & -2 \\ 1 & 1 & t-1 \end{bmatrix}$$

① 一阶行列式因子

含有元素 1，故　$D_1 = 1$。

② 二阶行列式因子：计算所有 9 个二阶子式（按选取行、列排列）

选取行 \ 列	第 1、2 列	第 1、3 列	第 2、3 列
第 1、2 行	$t(t+1)$	$-2t$	$-t$
第 1、3 行	$\mathbf{t}$	$t(t-2)$	$-t$
第 2、3 行	$-t$	$2t$	$t(t+1)$

全部二阶子式均含因子 t，且有一个恰为 t，故　$D_2 = t$。

③ $D_3 = \det M = (t-1)[(t+2)(t-1)+2] + 2t - t = t^3$。　（按第一列展开）

$d_i = D_i / D_{i-1}$　　**$d_1 = 1$，$d_2 = t$，$d_3 = t^2$；初等因子：t，t^2；　$J = J_1(2) \oplus J_2(2)$**

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 1　同题计算——特征多项式分析法（秩 + 零度）

除行列式因子法和多项式初等变换法外，还可以利用特征多项式和几何重数，快速确定 Jordan 标准形

① 求特征多项式

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\phi_a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-2)^3$

特征值只有 2；代数重数为 3。（捷径：利用矩阵 A 的迹和秩）

→ 对应 Jordan 块的阶数之和为 3。

② 求几何重数：计算 A−2I 的秩

$$2I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 = -2R_1$，$R_3 = -R_1$。

rank(2I − A) = 1。

dim N(2I − A) = 3−1 = 2。

③ 只有 2 个 Jordan 块，且块的阶数之和为 3 ⇒ 只能是 2+1。

$J = J_2(2) \oplus J_1(2)$，与前两种方法一致。

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 含参数矩阵的 Jordan 标准形

题目：判断矩阵 A 在什么条件下可以对角化，并求所有可能的 Jordan 标准形。

已知：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

思考两个问题

① a 取何值时， A 可以对角化?

② 不同参数下， Jordan 块有何区别?

第一步：求特征多项式（ A 为上三角矩阵）

$$\varphi_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^2(\lambda - 5)$$

因此： λ=2 的代数重数为 2； λ=5 的代数重数为 1 。

关键问题：特征值 2 是两个一阶块，还是一个二阶块?

计算 rank(A−2I) ，讨论 a 取值对其的影响

特征多项式分析法（秩 + 零度）：分参数讨论

特征值 2 的代数重数为 2；特征值 5 对应一个一阶 Jordan 块。

第二步：计算 A−2I

$$A-2I=\begin{pmatrix}0 & a & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

仅需判断第 1、3 行是否独立：

$R_1=(0, a, 1)$

$R_3=(0, 0, 3)$

情况①　a=0

$R_1=(0,0,1)$，$R_3=3R_1$

rank(A−2I)=1，**dim N(**A−2I**)** =3−1=2

两块均为一阶：

J=diag(2,2,5)，可对角化

情况②　a≠0

R_1 与 R_3 线性无关

rank(A−2I)=2，**dim N(**A−2I**)** =3−2=1

只有一个二阶块：

$J=J_2(2)\oplus J_1(5)$，不可对角化

结论：A 可对角化 ⇔ a=0，不同的取值对应不同的 Jordan 块形态

第三种方法的局限——一次秩计算不一定够

例如：已知四阶矩阵 A 的特征多项式和几何重数：

$$\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^4, \quad rank(A - 2I) = 2$$

因此：特征值 2 的代数重数为 4；几何重数为 4−2=2。

即：该特征值共有 2 个 Jordan 块，块的阶数之和为 4。

可能①　3 + 1

$$J_3(2) \oplus J_1(2)$$

一个三阶块＋一个一阶块

可能②　2 + 2

$$J_2(2) \oplus J_2(2)$$

两个二阶 Jordan 块

如何区分？令 N=A−2I，再计算一次 N^2 的秩。

3+1： $rank(N^2)=1$，零度 =3　　2+2： $rank(N^2)=0$，零度 =4

单个 **J−λI** 块的幂会逐次降秩

为什么 N^2 能区分？举一个 Jordan 块例子

对特征值 2 的 Jordan 块，令 $N_m=J_m(2)-2I$。观察连续乘方后的秩和零度。

① 三阶 Jordan 块：平方后仍不为零，三次方才为零

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

rank = 2，零度 = 1　　rank = 1，零度 = 2

再乘一次：$N_3^3 = 0$，rank = 0，零度 = 3。

② 二阶 Jordan 块：平方后已经为零

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$N_2^2 = 0$，rank = 0，零度 = 2

回到四阶矩阵：3+1 的 N^2 秩为 1；2+2 的 N^2 秩为 0。

以 n=4 为例

	rank(J− λI)	N(J− λI)	Rank((J− λI) ^{2})	N((J− λI) ^{2})
1+1+1+1	0	4	0	4
1+1+2	0+0+1	3	0+0+0	4
3+1	2+0	2	1+0	3
2+2	1+1	2	0+0	4

对于同一个特征值 λ ，

N((J− λI) ^{m}) 首次等于 n 时， m 的大小即为 最大 Jordan 块的阶数

例 矩阵多项式约束下的 Jordan 标准形

已知三阶矩阵 A 满足下列方程，求所有可能的 Jordan 标准形。

$$A^2 - 6A + 9I = 0$$

① 先整理多项式（完全平方公式）

$$A^2 - 6A + 9I = (A - 3I)^2 = 0$$

② 确定特征值：设 λ 是矩阵 A 的一个特征值， x 是对应的非零特征向量

$$Ax = \lambda x \rightarrow Ax - 3x = \lambda x \quad -3x \qquad (A - 3I)x = (\lambda - 3)x$$

两边再左乘$(A - 3I)$

$$(A - 3I)^2 x = (\lambda - 3)(A - 3I)x = (\lambda - 3)^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 3$$

因此， A 的唯一特征值为 3，代数重数为 3。

③ 因为 $(A-3I)^2=0$，所有 Jordan 块的阶数均不超过 2。

列出所有可能的 Jordan 标准形

特征值只有 3，代数重数为 3；每个 Jordan 块阶数不超过 2。

块的阶数分拆	对应 Jordan 标准形
2 + 1	$J_a = J_2(3) \oplus J_1(3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
1 + 1 + 1	$J_b = J_1(3) \oplus J_1(3) \oplus J_1(3) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

验证：两种结构均满足题目的平方为零条件。

$$(J_a - 3I)^2 = 0, \qquad (J_b - 3I)^2 = 0$$

（平方为零，不代表一次方一定非零，不能排除 A=3I ）

如果不利用 $(A-3I)^2=0$，所有 Jordan 块的阶数均不超过 2

$$(J_3(3) - 3I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

例 2：求矩阵 的 Jordan 标准形。

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

[解] 写出特征矩阵

$$(\lambda I-A)=\begin{bmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda-3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}$$

第 1 ～ 4 行与第 1 ，2 ，4 ，5 列交叉的元素形成的四阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(3\lambda-4)$$

第 1 ，2 ，3 ，5 行与 1 ，3 ，4 ，5 列交叉的元素形成的四阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \lambda-4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = -(\lambda-4)^2$$

$$:(\lambda-2)(3\lambda-4) \qquad :-(\lambda-4)^2$$

这两个子式的公因式为 1，故 $D_4(\lambda)=1$

$$\Rightarrow D_1(\lambda)=D_2(\lambda)=D_3(\lambda)=1$$

第 1～5 行与第 1、2、3、5、6 列交叉的元素形成的五阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda-4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-4 & 0 \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda-4)^2$$

第 1 、2 、3 、5 、6 行与第 1 、3 、4 、5 、6 列交叉的元素形成的五阶子式为

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda-2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = 4(\lambda-2)^3$$

其它五阶子式均含$(\lambda-2)$因式，故 $D_5(\lambda)=(\lambda-2)$

特征值行列式为 $D_6(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)^3$ ，从而有 $d_i(\lambda)=\dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$

$$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=d_4(\lambda)=1$$

$$d_5(\lambda)=(\lambda-2)$$

$$d_6(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)^3$$

初等因子组为 $(\lambda-2)$ ，$(\lambda-2)^2$ $(\lambda-4)^3$ ，

相应的 Jordan 块为

$$[2] \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

例 2　初等变换法

已知六阶矩阵 A，构造特征矩阵 M(λ)=λI−A 。令 t=λ−2， s=λ−4=t−2 。

$$M(\lambda) = \begin{bmatrix} t & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & t-2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & t-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & t-1 \end{bmatrix}$$

通过多项式矩阵的行、列初等变换，化为 Smith 。

允许：交换行 / 列；整行 / 列乘非零常数；把某行 / 列的多项式倍加到另一行 / 列。
不允许：整行 / 列直接乘以 t 、s 等非常数多项式。

矩阵中已有常数 ±1 。选它们作为主元，行、列消元后分离出两个单位因子。

$$M(\lambda) \sim diag(I_2, B_4)$$

$$B_4 = \begin{bmatrix} t-2 & t+2 & -t & 2 \\ 0 & -t^2 & t(t+1) & -t \\ 0 & t-2 & -t(t-2) & t-2 \\ 0 & 0 & -t & t \end{bmatrix}$$

① $C_4 \rightleftarrows C_1$ ， $R_3 \leftarrow R_3+R_1$
② $R_4 \leftarrow R_4+(1-t)R_1$
③ $C_2 \leftarrow C_2+C_1$ ， $C_4 \leftarrow C_4-tC_1$
④ $C_5 \leftarrow C_5-C_1$
⑤ $C_5 \rightleftarrows C_2$ ，继续行列消元
⑥ 其余操作按同一规则进行

继续在剩余子块中消元。通过多项式倍加，可得到非零常数主元 2 （归一化为 1 。

① B_4 化为 diag(1,B_3) ，余下三阶子块：

$$B_3 = \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} -ts & t(t+2) & ts \\ -ts & -ts & -s^2 \\ -t(t+2) & ts & -ts \end{bmatrix}$$

再以相同方式得到第四个常数主元，最后剩下一个二阶多项式子块：

② B_3 再化为 diag(1,B_2) ，余下二阶子块：

$$B_2 = (t/4)\begin{bmatrix} ts & s^2 \\ t(t-6) & -s(3t-2) \end{bmatrix}$$

t/4 只是为了书写简洁，从子块所有元素提取的公共因子；实际变换没有把整行 / 整列除以 t 。

。 B_2=(t/4)H ，先对 H 。

$$H = \begin{bmatrix} ts & s^2 \\ t(t-6) & -s(3t-2) \end{bmatrix}$$

① $R_2 \leftarrow R_2 - R_1$ ；再令 $R_2 \leftarrow -\frac{1}{4}R_2$ 。

$$\begin{bmatrix} ts & s^2 \\ t & s(t-1) \end{bmatrix}$$

② $R_1 \leftarrow R_1 - sR_2$ ，利用 s=t−2 消去左上角。

$$\begin{bmatrix} 0 & -s^3 \\ t & s(t-1) \end{bmatrix}$$

这些变换作用在 H 上； B_2 前面的 t/4 始终保留。

③ 用 $C_2 \leftarrow C_2 - (t-3)C_1$，把右下角化为常数 2。

$$\begin{bmatrix} 0 & -s^3 \\ t & 2 \end{bmatrix}$$

④ 交换两行；第 2 列乘 ½；交换两列。
⑤ 用第 1 行消去左下角，再用第 1 列消去右上角。

$$H \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ts^3/2 \end{bmatrix}$$

因此： $B_2=(t/4)H$ 经过相同行列变换，再乘非零常数归一化：

$$B_2 \sim diag(t, t^2 s^3)$$

综上，四个单位主元已分离，最后的二阶子块化为 $diag(t, t^2s^3)$。

$$S(\lambda) = diag(1, 1, 1, 1, t, t^2 s^3)$$

$$S(\lambda) = diag(1,1,1,1,t,t^2s^3)$$

代回 t=λ−2， s=λ−4：

$$d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1, \qquad d_5 = \lambda - 2, \qquad d_6 = (\lambda-2)^2(\lambda-4)^3$$

初等因子（保留幂次）： $(\lambda-2)$、$(\lambda-2)^2$、$(\lambda-4)^3$

$$J = J_1(2) \oplus J_2(2) \oplus J_3(4)$$

Jordan 标准形为

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

例 2　特征多项式分析法

设 t=λ−2 ， s=λ−4 。利用特征矩阵中的零元素，先沿第 5 行展开，再沿第 3 列展开。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = s^2\, det(K)$$

$$K = \begin{bmatrix} t & -1 & 1 & 0 \\ -1 & t & 0 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$$

再沿 K 的第 3 行展开（只有两项非零）：

$$det(K) = -t + (t-1)t(t^2 - t - 1) = t^3 s$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^3$$

λ=2 与 λ=4 的代数重数均为 3 。

分别求两个重特征值对应的几何重数： N(A−λI)=6−rank(A−λI) 。

① 特征值 2 （代数重数 3 ）

A−2I： 第 4 行 = − 第 1 行，第 6 行 = 第 2 行；
其余第 1 、2 、3 、5 行线性无关，因此 rank(A−2I)=4 。

$$N(A-2I) = 6-4 = 2 \Rightarrow 2+1$$

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

② 特征值 4 （代数重数 3 ）

A−4I： 第 5 行是零行；其余 5 行线性无关
（对应的一个五阶子式为 − 32 ≠ 0 ）， rank(A−4I)=5 。

$$N(A-4I) = 6-5 = 1 \Rightarrow 3$$

$$A-4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$J = J_1(2) \oplus J_2(2) \oplus J_3(4)$$

目标：确定各特征值对应的 Jordan 块大小、个数，从而写出 J 。

① 初等变换法

对 λI−A 进行合法行、列变换，化为 Smith 标准形。

不变因子分解为初等因子，一个初等因子对应一个 Jordan 块。

② 行列式因子法

求各阶子式的首一最大公因式 D_k ，再求不变因子 d_k 。$d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$

将各 d_k 分解为初等因子，即可写出 Jordan 块。

③ 特征多项式分析法

求特征值及代数重数，再求对应的几何重数。

代数重数决定块阶数之和；几何重数决定块数。

（ 块大小尚不确定时，继续计算 $\mathrm{rank}[(A-\lambda I)^k]$ 或 $\dim N[(A-\lambda I)^k]$ ）

Jordan 标准形变换矩阵的求法

$$P^{-1}AP = J \quad \rightarrow \quad AP = PJ$$

（1） 将 P 按 J 的结构写成列块的形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix}$$

$$\uparrow_{m_1\text{列}} \quad \uparrow_{m_2\text{列}} \qquad \uparrow_{m_r\text{列}}$$

$$A\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad AP_i = P_i J_i \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

（2）求解 r 个矩阵方程 $AP_i = P_i J_i \quad (i = 1, 2 \cdots r)$

(3) 将 r 个 合成变换矩阵

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix}$$

关于方程 $AP_i = P_i J_i$ 的求解

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

特征向量 广义特征向量

第一列： $AP_{i1} = \lambda_i P_{i1} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{i1} = 0$

第二列： $AP_{i2} = P_{i1} + \lambda_i P_{i2} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{i2} = P_{i1} \rightarrow (A - \lambda_i I)^2 P_{i2} = 0$

… … …

最后一列：

$$AP_{im_i} = P_{im_{i-1}} + \lambda_i P_{im_i} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{im_i} = P_{im_{i-1}} \rightarrow (A - \lambda_i I)^{m_i} P_{im_i} = 0$$

两种具体做法：（i）按照 $P_{i1} \rightarrow P_{i2} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{im_i}$ 的顺序求解，即先求 P_{i1}，再求 P_{i2}、P_{i3} …

（ii）先求 $(A - \lambda_i I)^{m_i}$ 的特征向量 P_{im_i}，然后直接得到

$$P_{im_{i-1}} \rightarrow P_{im_{i-2}} \rightarrow \cdots \rightarrow P_{i1}$$

前一做法由于 $(A - \lambda_i I)$ 为奇异矩阵，每一步均存在多解及

再后一步、…，直至最后一步才能完全确定一些待定系数；而后一做法仅出现一次求解方程，其余为直接赋值，无上述问题。但又可能导致低阶 P_{im_j} 出现零向量的问题。

由于 $P_{i1}=(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}$

$P_{i2}=(A-\lambda_i I)^{m_i-2}P_{im_i}$

$P_{im_{i-1}}=(A-\lambda_i I)P_{im_i}$

故 P_{im_i} 应满足：

$(A-\lambda_i I)^{m_i}P_{im_i}=0$ 但 $(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}\neq 0$

同一特征值可能出现在不同的 Jordan 块中，对于这种情况，按各 Jordan 块阶数高低依次进行处理，高阶先处理，低阶后处理，同阶同时处理。

(1) 最高阶（没有属于同一特征值的 Jordan 块同阶）可按下述方法求出 P_{im_i}，即使 $(A-\lambda_i I)^{m_i} x = 0$，但 $(A-\lambda_i I)^{m_i-1} x \neq 0$ 的 作为 P_{im_i}。

然后由方程 $P_{i(j-1)} = (A-\lambda_i I)P_j$ 依次求出 $P_{im_{i-1}}, P_{im_{i-2}}, \cdots$，直至 P_{i1}。

(2) 对于较低阶的 Jordan 块，P_{im_i} 它的不仅要考虑到满足

$$(A-\lambda_i I)^{m_i} x = 0$$

但 $(A-\lambda_i I)^{m_i-1} x \neq 0$ 而且还应与前述 P_{ij} 线性无关。

(3) 其它属于同一特征值的 Jordan 块处理时，按照（2）的原则处理即可。

(4) 出现多个属于同一特征值的 Jordan 块同阶时，还应考虑线性无关问题。

作业： 习题 1.2， 5、10、11、19

