矩阵论

第 06 讲

Jordan 标准形的计算与应用

上讲回顾

第五讲　Jordan 标准形

- Jordan 标准形

  Jordan 标准形的存在定理

- 多项式矩阵

  多项式矩阵的初等变换

  多项式矩阵的标准形式

- 基变换与坐标变换

  Jordan 标准形求法

  Jordan 标准形变换矩阵

Jordan 标准形的存在定理

任何方阵 A 均可通过某一相似变换化为如下 Jordan 标准形：

$$J=\begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & O & \\ & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & O & \\ & & O & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Jordan 块矩阵

$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的特征值，可以是多重的。

多项式矩阵（又称为 λ 阵）

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & L & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & L & a_{2n}(\lambda) \\ M & M & L & M \\ a_{n1}(\lambda) & a_{n2}(\lambda) & L & a_{nn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为 λ 的多项式矩阵，其中矩阵元素 $a_{ij}(\lambda)$ 为 λ 的多项式。

- 多项式矩阵的初等变换

初等变换的目的是为了在保持矩阵原有属性的前提下形式上变得简单。

(1) 互换两行（列）

(2) 以非零常数乘以某行（列）　[这里不能乘以 的多项式或零，

(3) 这样有可能改变原来矩阵的秩和属性]

将某行（列）乘以 的多项式加到另一行（列）

多项式矩阵的标准形式：采用初等变换可将多项式矩阵化为如下形式：

$$A(\lambda)\rightarrow\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & 0 \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中，多项式 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式（首项系数为 1，即最高幂次项的系数为 1），且 $d_1(\lambda)\mid d_2(\lambda)$ $d_2(\lambda)\mid d_3(\lambda)$

$d_{r-1}(\lambda)\mid d_r(\lambda)$ 即 $d_i(\lambda)$ 是 $d_{i+1}(\lambda)$ 的因式。

3. Jordan 标准形的求法

(1) 求出特征多项式 $(\lambda I - A)$ 的初等因子组，设为

$$(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, \ldots (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \quad \circ \quad (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

(2) 写出各 Jordan 块矩阵（一个初等因子对应一个 Jordan 块矩阵）

$$(\lambda - \lambda_i)^{n_i} \rightarrow J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \mathbf{O} & \\ & & \mathbf{O} & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

(3) 合成 Jordan 矩阵：

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & 0 \\ & J_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$$

Jordon 标准形变换矩阵的求法

$$P^{-1}AP = J \quad \rightarrow \quad AP = PJ$$

(1) 将 P 按 J 的结构写成列块的形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix}$$

$$\underset{m_1\text{列}}{\uparrow} \quad \underset{m_2\text{列}}{\uparrow} \qquad \underset{m_r\text{列}}{\uparrow}$$

$$A\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad AP_i = P_i J_i \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

(2) 求解 r 个矩阵方程 $AP_i = P_i J_i \quad (i = 1, 2 \cdots r)$

(3) 将 r 个 合成变换矩阵

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{L} & \mathbf{P}_r\end{bmatrix}$$

关于方程 $\mathbf{AP}_i=\mathbf{P}_i\mathbf{J}_i$ 的求解

$$\mathbf{P}_i=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} & \mathbf{L} & \mathbf{P}_{im_i}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} & \mathbf{L} & \mathbf{P}_{im_i}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{i1} & \mathbf{P}_{i2} & \mathbf{L} & \mathbf{P}_{im_i}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \mathbf{O} & \\ & & \mathbf{O} & 1\\ 0 & & & \lambda_i\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AP}_{i1}=\lambda_i\mathbf{P}_{i1}\rightarrow(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{P}_{i1}=\mathbf{0}$$

$$\mathbf{AP}_{i2}=\mathbf{P}_{i1}+\lambda_i\mathbf{P}_{i2}\rightarrow(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})\mathbf{P}_{i2}=\mathbf{P}_{i1}\rightarrow(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^2\mathbf{P}_{i2}=\mathbf{0}$$

$$AP_{im_i} = P_{im_{i-1}} + \lambda_i P_{im_i} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{im_i} = P_{im_{i-1}} \rightarrow (A - \lambda_i I)^{m_i} P_{im_i} = 0$$

两种具体做法：(i) 按照 $P_{i1} \rightarrow P_{i2} \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow P_{im_i}$ 的顺序求解，即先求出特征向量 P_{i1}，然后由后续方程求出 P_{i2}、P_{i3}、...；（ii）先求 $(A - \lambda_i I)^{m_i}$ 的特征向量 P_{im_i}，然后直接得到 $P_{im_{i-1}} \rightarrow P_{im_{i-2}} \rightarrow \mathrm{L} \rightarrow P_{i1}$。

前一做法由于（$A - \lambda_i I$）为奇异矩阵，每一步均存在多解及

再后一步、...，直至最后一步才能完全确定一些待定系数；而后一做法仅出现一次求解方程，其余为直接赋值，无上述问题。但又可能导致低阶 P_{im_j} 出现零向量的问题。

由于 $P_{i1}=(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}$

$P_{i2}=(A-\lambda_i I)^{m_i-2}P_{im_i}$

$P_{im_{i-1}}=(A-\lambda_i I)P_{im_i}$

故 P_{im_i} 应满足：

$(A-\lambda_i I)^{m_i}P_{im_i}=0$ 但 $(A-\lambda_i I)^{m_i-1}P_{im_i}\neq 0$

同一特征值可能出现在不同的 Jordan 块中，对于这种情况，按各 Jordan 块阶数高低一次进行处理，高阶先处理，低阶后处理，同阶同时处理。

(1) 最高阶（没有属于同一特征值的 Jordan 块同阶）可按下述方法求出 P_{im_i}，即使 $(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0$，但 $(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0$ 的 作为 P_{im_i}。

然后由方程 $P_{i(j-1)}=(A-\lambda_i I)P_j$ 依次求出 $P_{im_{i-1}}, P_{im_{i-2}}, \cdots$，直至 P_{ij} 且 j 等于下一个属于同一特征值的 Jordan 块的阶数。

(2) 对于上述新 Jordan 块，它的 m_i 不仅要考虑到满足

$$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0$$

但，$(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0$ 而且还应与前述 P_{ij} 线性无关。

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

5．证明两个线性变换相等

设 x_1、x_2 是线性空间 V^2 的基，T_1、T_2 是 V^2 的线性变换，$T_1x_1 = y_1,\quad T_1x_2 = y_2$

$T_2(x_1 + x_2) = y_1 + y_2,\quad T_2(x_1 - x_2) = y_1 - y_2.$　　证明 $T_1 = T_2.$

证：① 利用 T_2 的线性性，将已知条件展开。

$$\begin{cases} T_2(x_1 + x_2) = T_2x_1 + T_2x_2 = y_1 + y_2, \\ T_2(x_1 - x_2) = T_2x_1 - T_2x_2 = y_1 - y_2. \end{cases}$$

两式相加、相减，再除以 2，得到

$$T_2x_1 = y_1 = T_1x_1,\qquad T_2x_2 = y_2 = T_1x_2.$$

② 任取 $x \in V^2$，因 x_1、x_2 为一组基，可写为 $x=k_1x_1+k_2x_2$。

$$\begin{aligned} T_1x &= k_1T_1x_1 + k_2T_1x_2 = k_1y_1 + k_2y_2 \\ &= k_1T_2x_1 + k_2T_2x_2 = T_2x. \end{aligned}$$

故 $T_1=T_2$。

（两个线性变换在一组基上的作用相同，就完全相同）

上讲作业：习题 1.2 ， 5 、10 、11 、19

10 . 设 T 是 R^3 的线性变换， $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)\in R^3$ ，且 $Tx=(0,\xi_1,\xi_2)$ 。

求 T^2 的像子空间 $R(T^2)$ 和核子空间 $N(T^2)$ 的基与维数。

解：① T^2 表示连续作用两次，求 T^2x 。

$$T^2x = T(Tx) = T(0,\xi_1,\xi_2) = (0,0,\xi_1).$$

② 像子空间： 让输入 x 取遍 R^3 ，观察输出能取哪些向量

$$R(T^2) = \{(0,0,\xi_1): \xi_1 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{(0,0,1)\}.$$

一组基为 (0,0,1) ，维数为 1 。

③ 核子空间： 求哪些输入经过 T^2 后变为零

$$T^2x = 0 \Leftrightarrow \xi_1 = 0, \qquad \xi_2,\xi_3 \text{ 任意.}$$

$$N(T^2) = \{(0,\xi_2,\xi_3): \xi_2,\xi_3 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{span}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

一组基为 (0,1,0) 、(0,0,1) ，维数为 2 。

核验： $\dim(R(T^2)) + \dim(N(T^2)) = 3$

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

11．两组基、过渡矩阵与变换矩阵

给定 R^3 的两组基：

$$x_1=(1,0,1),\quad x_2=(2,1,0),\quad x_3=(1,1,1),$$

$$y_1=(1,2,-1),\quad y_2=(2,2,-1),\quad y_3=(2,-1,-1).$$

定义线性变换 T，使 $Tx_i=y_i$（i=1,2,3。

（1）写出由基 $x_1、x_2、x_3$ 改为基 $y_1、y_2、y_3$ 的过渡矩阵。

（2）求 T 在基 $x_1、x_2、x_3$ 。

（3）求 T 在基 $y_1、y_2、y_3$ 下的矩阵。

解（1）：把基向量的标准坐标按列排列，记

$$X=(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\qquad Y=(y_1,y_2,y_3)=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&2&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

按教材约定： $Y=XC$，因此 $C=X^{-1}Y$； C 的第 j 列就是 y_j 在基 x 。

相应的坐标关系为 $[v]_x=C[v]_y$，注意方向。

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

19、求下列各矩阵的 Jordan 标准形 (1) $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&2&0\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}3&1&0&0\\-4&-1&0&0\\7&1&2&1\\-7&-6&-1&0\end{pmatrix}$

（1）求特征多项式，按第一列展开：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-2&0\\\cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

有3个不同的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$，

故 Jordan 标准形为对角矩阵：

$$J=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ -4 & -1 & 0 & 0\\ 7 & 1 & 2 & 1\\ -7 & -6 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

写出特征矩阵 $\lambda I-A$，求行列式因子。

① 一阶行列式因子：所有一阶子式的最大公因子 $D_1(\lambda)=1$

② 二阶行列式因子：存在两个互质的二阶子式，故 $D_2(\lambda)=1$

③ 三阶行列式因子：取第 2,3,4 行与第 1,2,4 列的子式：

$$\begin{vmatrix}4 & \lambda+1 & 0\\ -7 & -1 & -1\end{vmatrix}=7\lambda^3-4\lambda+17$$

它与 $D_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$ 互质，故 $D_3(\lambda)=1$

④ 四阶行列式因子：$D_4(\lambda)=\det(\lambda\mathrm{I}-A)=(\lambda-1)^4$

上讲作业：习题 1.2， 5、10、11、19

不变因子 → 初等因子 → Jordan 标准形

第一步：求不变因子（由行列式因子递推）：

$$d_1 = D_1 = 1, d_2 = \frac{D_2}{D_1} = 1, d_3 = \frac{D_3}{D_2} = 1, d_4 = \frac{D_4}{D_3} = (\lambda - 1)^4$$

第二步：初等因子（分解不变因子的非常数部分）：

$$(\lambda - 1)^4$$

第三步：$(\lambda - 1)^4$ 对应一个4阶Jordan块：

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

第 6 讲 Jordan 标准形变换矩阵

- Jordan 标准形变换矩阵求解
- Jordan 标准形的幂及多项式
- 矩阵序列

任何方阵 A 均可通过某一相似变换化为如下 Jordan 标准形

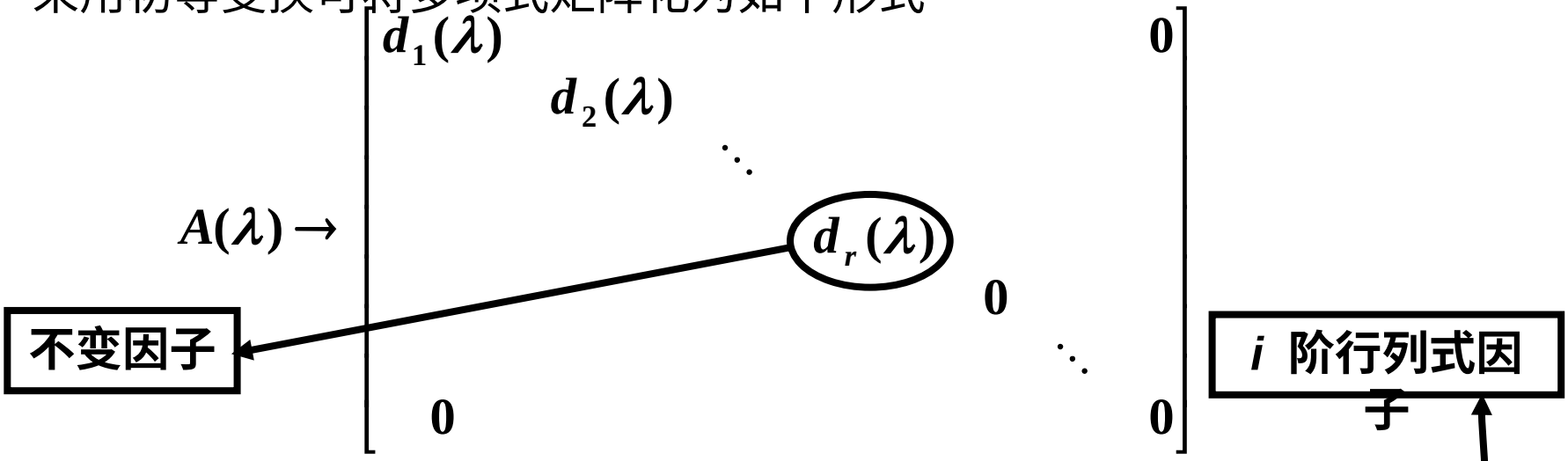
$$J = \begin{bmatrix} J_1(\lambda_1) & & & \mathbf{0} \\ & J_2(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J_s(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

$$J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Jordan 块矩阵

多项式矩阵的标准形式

采用初等变换可将多项式矩阵化为如下形式



- 多项式 $d_i(\lambda)$ 是首一多项式（首项系数为 1，即最高幂次项的系数为 1）
- 且 $d_i(\lambda)$ 是 $d_{i+1}(\lambda)$ 的因式

$$d_i(\lambda) = \frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$$

Jordan 标准形的求法

1 求出特征矩阵 $(\lambda I - A)$ 的初等因子组，设为 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}$，$(\lambda - \lambda_2)^{m_2}$，…，$(\lambda - \lambda_s)^{m_s}$，其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ 可能有相同的；

指数 $m_1, m_2, \ldots, m_s$ 也可能有相同的，且 $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$ 。

2 写出各 Jordan 块矩阵（一个初等因子对应一个 Jordan 块矩阵）

$$(\lambda - \lambda_i)^{m_i} \rightarrow J_i(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & & 0 \\ 1 & \lambda_i & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1 \quad \lambda_i \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & J_s \end{bmatrix}$$

3 合成 Jordan 矩阵：

$$(\lambda I-A)\to\begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & 0\\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

初等变换法

多项式矩阵标准形式（Smith 标准型）

特征矩阵 $(\lambda I-A)$

行列式因子

$$d_i(\lambda)=\frac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$$

行列式因子法

不变因子 $d_i(\lambda)$

$d_1(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)\to(\lambda-2)^2$和$(\lambda-3)$

$d_2(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-3)^5\to(\lambda-2)^2$和$(\lambda-3)^5$

初等因子组

Jordan 标准形

$$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}\to J_i(\lambda_i)=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

$$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & 0\\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_s \end{bmatrix}$$

特征多项式分析法

$(\lambda - \lambda_i)^k$ 代数重数

以 n=4 为例

几何重数

	rank(J− λI)	N(J− λI)	Rank((J− λI) ^{2})	N((J− λI) ^{2})
1+1+1+1	0	4	0	4
1+1+2	0+0+1	3	0+0+0	4
3+1	2+0	2	1+0	3
2+2	1+1	2	0+0	4

代数重数决定块阶数之和；几何重数决定块数。

对于同一个特征值 λ ，

N((J− λI) ^{m}) 首次等于 n 时， m 的大小即为 最大 Jordan 块的阶数

行列式因子法求 Jordan 标准形

定理: 设 $A(\lambda)$ 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵, 则 $A(\lambda)$ 的行列式因子 $D_k(\lambda)$ 为:

$$D_k(\lambda) = d_1(\lambda) d_2(\lambda) \cdots d_k(\lambda) \quad (k = 1,2, \cdots, r)$$

其中 $d_k(\lambda)(k = 1,2, \cdots, r)$ 是 $A(\lambda)$ 的不变因子。于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda), d_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}, \cdots, d_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$$

求解过程:

1 求出 $(\lambda I - A)$ 的 n 个行列式因子 $D_k(\lambda)(k = 1,2, \cdots, n)$

2 求出 A 的不变因子 $d_k(\lambda)(k = 1,2, \cdots, n)$

3 求出 A 的初等因子组

4 写出各初等因子对应的 **Jordan** 块，组合成 Jordan 标准形

行列式因子法

例 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

解：$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-1&-2&-3&-4\\0&\lambda-1&-2&-3\\0&0&\lambda-1&-2\\0&0&0&\lambda-1\end{bmatrix}$

显然有 $D_4(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^4$，又 $I-A$ 中有 3 阶子式

$$\begin{vmatrix}-2&-3&-4\\\lambda-1&-2&-3\\0&\lambda-1&-2\end{vmatrix}=-4\lambda(\lambda+1)$$

D3=1: 所有三阶子矩阵行列式的最大公因子为1

因为 $D_3(\lambda)$ 整除每个 3 阶子式，且有 $D_3(\lambda)\mid D_4(\lambda)$，所以 $D_3(\lambda)=1$，从而 $D_2(\lambda)=D_1(\lambda)=1$。于是 A 的不变因子为：$d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$，$d_4(\lambda)=(\lambda-1)^4$，即 A 只有一个初等因子 $(\lambda-1)^4$，故 A 的 Jordan 标准形为 $J=\begin{bmatrix}1&&&\\&1&1&\\&&1&1\\&&&1\end{bmatrix}$

例　求矩阵 $\begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$ 的 **Jordan** 标准形。

特征行列式 $D_3 = |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -7 & 3 \\ 2 & \lambda + 5 & -2 \\ 4 & 10 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - j)(\lambda + j)$

初等因子组为 $(\lambda - 1)\ (\lambda - j)\ (\lambda + j)$

Jordan 标准型为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & j & \\ & & -j \end{bmatrix}$

例 1. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形。

初等变换法

1 利用初等变换将特征矩阵化为对角矩阵

2 对角线上非零多项式为 $d_i(\lambda)$

3 由次数大于零的 $d_i(\lambda)$ 的全体不可约因式得到初等因子组

解：

$$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda-3 & -1 & 1\\ 2 & \lambda & -2\\ 1 & 1 & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$C_1 \longrightarrow C_1-(\lambda-3)C_3$，$C_2 \longrightarrow C_2+C_3$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & -2\\ 1-(\lambda-3)^2 & (\lambda-2) & \lambda-3\end{bmatrix}$$

$R_2 \longrightarrow R_2+2R_1$，$R_3 \longrightarrow R_3-(\lambda-3)R_1$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)(\lambda-4) & (\lambda-2) & 0\end{bmatrix}$$

$R_3 \longrightarrow R_3-R_2$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 2(\lambda-2) & (\lambda-2) & 0\\ -(\lambda-2)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$C_1 \longrightarrow C_1-2C_2$

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -(\lambda-2)^2 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$C_1 \longrightarrow -1\,C_1$，$C_1 \longleftrightarrow C_3$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2\end{bmatrix}$$

多项式矩阵的初等变换

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 & 1 \\ 2 & \lambda & -2 \\ 1 & 1 & \lambda-3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$$

可见， A 的不变因子为 $d_1(\lambda)=1$ ， $d_2(\lambda)=(\lambda-2)$ ， $d_3(\lambda)=(\lambda-2)^2$

而 A 的初等因子为 $(\lambda-2)$, $(\lambda-2)^2$

故 A 的 Jordan 标准形为 $J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

例 1　同题计算——行列式因子法

仍用第 36—37 页的三阶矩阵。令 $t = \lambda - 2$，先构造特征矩阵：

$$M(\lambda) = \lambda I - A = \begin{bmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ 2 & t+2 & -2 \\ 1 & 1 & t-1 \end{bmatrix}$$

① 一阶行列式因子

含有元素 1，故 $D_1 = 1$。

② 二阶行列式因子：计算所有 9 个二阶子式（按选取行、列排列）

选取行 \ 列	第 1、2 列	第 1、3 列	第 2、3 列
第 1、2 行	$t(t+1)$	$-2t$	$-t$
第 1、3 行	$\mathbf{t}$	$t(t-2)$	$-t$
第 2、3 行	$-t$	$2t$	$t(t+1)$

全部二阶子式均含因子 t，且有一个恰为 t，故 $D_2 = t$。

③ $D_3 = \det M = (t-1)[(t+2)(t-1)+2] + 2t - t = t^3$。　（按第一列展开）

$d_i = D_i / D_{i-1}$　**$d_1 = 1$，$d_2 = t$，$d_3 = t^2$；初等因子：t，t^2；　$J = J_1(2) \oplus J_2(2)$**

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

例 1　同题计算——特征多项式分析法（秩 + 零度）

除行列式因子法和多项式初等变换法外，还可以利用特征多项式和几何重数，快速确定 Jordan 标准形

① 求特征多项式

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\phi_a(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda-2)^3$

特征值只有 2；代数重数为 3。

→ 对应 Jordan 块的阶数之和为 3。

（捷径：利用矩阵 A 的迹和秩）

② 求几何重数：计算 A−2I 的秩

$$2I - A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$R_2 = -2R_1$，$R_3 = -R_1$。

rank(2I − A) = 1。

dim N(2I − A) = 3−1 = 2。

③ 只有 2 个 Jordan 块，且块的阶数之和为 3 ⇒ 只能是 2+1。

$J = J_2(2) \oplus J_1(2)$，与前两种方法一致。

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Jordan 标准形变换矩阵

$$P^{-1}AP = J \longrightarrow AP = PJ$$

将 P 按 J 的结构写成列块的形式

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow$$

m_1列 m_2列 m_r列

$$A\begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & \cdots & P_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} AP_i = P_i J_i \\ (i = 1,2\cdots, r) \end{array}}$$

Jordon 标准形变换矩阵的求法

$$AP_i = P_i J_i \qquad (i = 1, 2 \cdots r)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \cdots & P_{im_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

第一列: $AP_{i1} = \lambda_i P_{i1} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{i1} = 0$

第二列: $AP_{i2} = P_{i1} + \lambda_i P_{i2} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{i2} = P_{i1} \rightarrow (A - \lambda_i I)^2 P_{i2} = 0$

最后一列: $AP_{im_i} = P_{im_i - 1} + \lambda_i P_{im_i} \rightarrow (A - \lambda_i I)P_{im_i} = P_{im_i - 1} \rightarrow (A - \lambda_i I)^{m_i} P_{im_i} = 0$

$$(A - \lambda_i I)^{m_i} P_{im_i} = 0$$

$$P_{im_{i-1}} = (A - \lambda_i I) P_{im_i}$$



$$P_{i2} = (A - \lambda_i I)^{m_i - 2} P_{im_i}$$

$$P_{i1} = (A - \lambda_i I)^{m_i - 1} P_{im_i}$$

Jordan 标准形变换矩阵求解

同一特征值可能出现在不同的 Jordan 块中

各 Jordan 块阶数高低依次进行处理，高阶先处理，低阶后处理，同阶同时处理。

最高阶（没有属于同一特征值的 Jordan 块同阶）

$(A-\lambda_i I)^{m_i}x=0$ 但 $(A-\lambda_i I)^{m_i-1}x\neq 0$ 的 x 作为 P_{im_i}

$P_{i(j-1)}=(A-\lambda_i I)P_j$ $P_{im_{i-1}},P_{im_{i-2}},\cdots$，直至 P_{i1}

对于上述新 Jordan 块，它的 P_{m_i} 不仅要考虑到满足

$$(A - \lambda_i I)^{m_i} x = 0$$

但 $$(A - \lambda_i I)^{m_i - 1} x \neq 0$$

而且还应与前述 P_{ij} 线性无关。

其它属于同一特征值的 Jordan 块处理时，按照较低阶的原则处理即可。

出现多个属于同一特征值的 Jordan 块同阶时，还应考虑线性无关问题。

$$AP_i = P_i J_i \qquad (i = 1, 2 \mathrm{L}\ r)$$

$$P_i = \begin{bmatrix} P_{i1} & P_{i2} & \mathrm{L} & P_{im_i} \end{bmatrix}$$





$$P_{im_{i-1}} = (A - \lambda_i I) P_{im_i}$$

$$P_{i1} = (A - \lambda_i I)^{m_i - 1} P_{im_i}$$

例：求 A 的 Jordan 标准形及其变换矩阵。

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

[解]：上一讲已求出其 Jordan 标准形，也可按如下方法求得。

$\lambda I - A$ 可采用初等变换法、行列式因子法

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & (\lambda-2) & \\ 0 & & & & & (\lambda-2)^2(\lambda-4)^3 \end{bmatrix}$$

确定不变因子 $d_i(\lambda)=\dfrac{D_i(\lambda)}{D_{i-1}(\lambda)}$

得到初等因子 $(\lambda-2)$，$(\lambda-2)^2$，$(\lambda-4)^3$

按此得出 Jordon 标准形

初等因子

$(\lambda-2)\cdot(\lambda-2)^2\cdot(\lambda-4)^3$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

同时可见 $\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^3$

即 $\lambda = 2$与$\lambda = 4$ 均为三重特征值 .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 4 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

附加：特征多项式分析

$$\dim(N(A-2I) = 6 - \operatorname{rank}(A-2I) = 2 \Rightarrow 2+1$$

$$\dim(N(A-4I) = 6 - \operatorname{rank}(A-4I) = = 1 \Rightarrow 3$$

$$A-2I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad A-4I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & & & & & 0 \\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1 \\ 0 & & & & & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 4)^3$$

即 $\lambda = 2$与$\lambda = 4$ 均为三重特征值．下面求变换矩阵 P

（1）$\lambda_3 = 4$ 的 Jordon 矩阵仅有一块，$= 3$

$$P_3 = \begin{bmatrix} P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

先求 P_{33} ，P_{33} 应满足 $(A - 4I)^3 P_{33} = 0$ $(A - 4I)^2 P_{33} \neq 0$

$$(A-4I)=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^2=\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^3=\begin{bmatrix} -12 & 8 & 0 & -8 & 0 & -4 \\ 8 & -12 & 0 & 4 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -8 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-4I)^3P_{33}=0$$

$$(A-4I)^2P_{33}\neq 0$$

求 $(A-4I)^3x=0$ $(A-4I)^2x=0$

设 $x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6\end{bmatrix}^T$

$(A-4I)^3x=0$ 其通解为

$$\xi_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\xi_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\xi_5\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$(A-4I)^2x=0$ 其通解为

$$\xi_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}+\xi_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

可取 $$P_{33}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$P_{32}=(A-4I)P_{33}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$$

$$P_{31}=(A-4I)P_{32}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

（2）对$\lambda_{1,2}=2$ 存在两个 Jordan 块，

$$J_1=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix} \qquad J_2=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

分别对应 P_1， $P_2=\begin{bmatrix}P_{21} & P_{22}\end{bmatrix}$

从 P_{22} 入手： $(A-2I)^2P_{22}=0$ $(A-2I)P_{22}\neq 0$

$$(A-2I)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^2=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 \\ -4 & -4 & 4 & 4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-2I)^2x=0 \rightarrow x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & 0 & \xi_1+\xi_2+\xi_6 & 0 & \xi_6\end{bmatrix}^T$$

$$(A-2I)x=0 \rightarrow x=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 & \xi_6\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2 & 0 & \xi_2 & 0 & -\xi_1\end{bmatrix}^T$$

取 $P_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$

$P_{21}=(A-2I)P_{22}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$

P_1 ： $(A-2I)P_1=0$

P_1与 P_{21}应线性无关，可取 $P_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$

（3）合成变换矩阵

$$J=\begin{bmatrix}2 & & & & & 0\\ & 2 & 1 & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 4 & 1 & \\ & & & & 4 & 1\\ 0 & & & & & 4\end{bmatrix}$$

$$P=\left[\begin{array}{c|cc|cc}1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0\end{array}\right]$$

λ=2　λ=2　λ=4

P^{-1} 存在

可以验证：$P^{-1}AP=J$

Jordan 标准形的幂及多项式

$$J^k=\begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix}$$

$$J_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \mathbf{O} & \\ & & \mathbf{O} & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

J_i^k 亦为类似的上三角形条带矩阵，在与主对角线平行的斜线上各元素相等 .

$$J_i^2=\begin{bmatrix} \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & & 0 \\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i^2 & \mathbf{O} & & \\ & & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & 1 \\ & 0 & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i \\ & & & & & \lambda_i^2 \end{bmatrix}$$

其中 J_i^k 第一行的元素依次为

$$\begin{cases} \lambda_i^k \quad k\lambda_i^{k-1} \quad \dfrac{k!}{2!(k-2)!}\lambda_i^{k-2} \quad \cdots \quad C_k^t\lambda_i^t \quad \cdots \quad 1 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 & (m_i - k\text{个}0),(m_i > k) \\ \lambda_i^k \quad k\lambda_i^{k-1} \quad \dfrac{k!}{2!(k-2)!}\lambda_i^{k-2} \quad \cdots \quad C_k^t\lambda_i^t \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad C_k^{k-m_i}\lambda_i^{k-m_i} & ,(m_i \le k) \end{cases}$$

设有多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$$

则

$$f(J) = \sum_{k=0}^{m} a_k J^k = a_0 I + a_1 J + \ldots + a_m J^m = \begin{bmatrix} f(J_1) & & & \\ & f(J_2) & & \\ & & \mathbf{O} & \\ & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

又

$$f(\lambda_i) = a_0 + a_1\lambda_i + \mathrm{L} + a_m\lambda_i^{\,m} = \sum_{k=0}^{m} a_k\lambda_i^{\,k}$$

$$f'(\lambda_i) = a_1 + 2a_2\lambda_i + \mathrm{L} + ma_m\lambda_i^{\,m-1} = \sum_{k=1}^{m} ka_k\lambda_i^{\,k-1}$$

$$f^{(m)}(\lambda_i) = m!a_m$$

$$f^{(m+l)}(\lambda_i) = 0, (l = 1, 2, \ldots)$$

故

$$f(J_i)=a_0\begin{bmatrix}1 & & & & 0\\ & 1 & & & \\ & & O & O & \\ & & O & O & \\ 0 & & & 1 & \\ & & & & 1\end{bmatrix}+a_1\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & & 0\\ & \lambda & 1 & & \\ & & O & O & \\ & & O & O & \\ 0 & & & \lambda & 1\\ & & & & \lambda\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}\lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & & 0\\ & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & \\ & & \lambda_i^2 & O & O\\ & & & O & O & 1\\ & 0 & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i\\ & & & & & \lambda_i^2\end{bmatrix}+L$$

$$=\begin{bmatrix}f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{m!}f^{(m)}(\lambda_i) & \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{m_i!}f^{(m_i)}(\lambda_i)\\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & O & & & O\\ & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & O & O & & \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\lambda_i)\\ & & & f(\lambda_i) & O & O & O & \frac{1}{m!}f^{(m)}(\lambda_i)\\ & & & & O & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & O\\ & & & & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i)\\ & & & & & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i)\\ & & & & & & & f(\lambda_i)\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{m!}f^{(m)}(\lambda_i) & \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{m_i!}f^{(m_i)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & O & & & O \\ & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & O & O & & \frac{1}{(m+1)!}f^{(m+1)}(\lambda_i) \\ & & & f(\lambda_i) & O & O & O & \frac{1}{m!}f^{(m)}(\lambda_i) \\ & & & & O & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) & O \\ & & & & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) \\ & & & & & & f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) \\ & & & & & & & f(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

这就是说，$f(J_i)$ 仍为上三角矩阵，在与主对角线平行的斜线上各元素均相等，而其第一行元素依次为

$$f(\lambda_i) \quad f'(\lambda_i) \quad \frac{1}{2!}f^{(2)}(\lambda_i) \quad \cdots \quad \frac{1}{m_i!}f^{(m_i)}(\lambda_i) \qquad (\text{无论}m_i\text{是否大于}m)$$

若 $A = P^{-1}JP$，则$f(A) = P^{-1}f(J)P$　计算十分方便，无需再采用矩阵乘积.

矩阵序列

1. 定义：设有矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$，其中 $A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})$，$k=1,2,\cdots$ 时 $a_{ij}^{(k)}\to a_{ij}$，则称 $\{A^{(k)}\}$ 收敛，并把 $A=(a_{ij})$ 叫做 $\{A^{(k)}\}$ 的极限，或称 $\{A^{(k)}\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{k\to\infty}A^{(k)}=A \text{或} A^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to}A$$

不收敛的级数则称为发散的，其中又分为有界和无界的情况.

2. 收敛矩阵序列的性质：

设 $A^{(k)}$，$B^{(k)}$ 分别收敛于 A,B 则

（1 $\alpha A^{(k)}+\beta B^{(k)}\underset{k\to\infty}{\to}\alpha A+\beta B$）

（2） $A^{(k)}B^{(k)} \underset{k\to\infty}{\to} AB$

（3） $(A^{(k)})^{-1} \underset{k\to\infty}{\to} A^{-1}$，若$(A^{(k)})^{-1}, A^{-1}$存在）

（4） $PA^{(k)}Q \underset{k\to\infty}{\to} PAQ$

3 收敛矩阵：设 A 为方阵，且当 $k\to\infty$ 时 $A^k \to 0$，则称 A 为收敛矩阵.

[定理] 方阵 A 为收敛矩阵的充要条件是 A 的所有特征值的模值均小于 1.

证明：对任何方阵 A, 均存在可逆矩阵 P，使得 $A = PJP^{-1}$

其中 J 为 A 的 Jordan 标准形

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix} \qquad J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

$$A^k = PJ^kP^{-1} = P \begin{bmatrix} J_1^k & & & \\ & J_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & 2\lambda_i^{k-1} & \cdots & \dfrac{k!}{m_i!(k-m_i)!}\lambda_i^{k-m_i} \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \end{bmatrix}, \text{当} k > m_i$$

$A^k \to 0$ 就等价于 $J_i^k \to 0 (i = 1, 2, ..., s)$ ，等价于 $\lambda_i^k \to 0 (i = 1, 2, ..., s)$ ，而这只有 $|\lambda_i| < 1$ 才可能也必能 .

[得证]

作业：习题 1.3 ， 11

