矩阵论

第 08 讲
矩阵函数的计算

上讲回顾

第七讲　矩阵级数与矩阵函数

- 矩阵级数
- 方阵的幂级数
- 矩阵函数
- 矩阵函数的计算
- 利用 Jordan 标准形求矩阵函数
- 利用零化多项式求解矩阵函数

矩阵级数

1. 定义：矩阵序列 $\{A^{(k)}\}$ 的无穷和 $A^{(1)}+A^{(2)}+\cdots+A^{(k)}+\cdots$ 叫做矩阵级数，而 $S_N=\sum_{k=1}^{N}A^{(k)}$ 称为其部分和，若矩阵序列 $\{S_N\}$ 收敛，且有极限 S，则称该级数收敛，且有极限 S。记为

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}=S$$

不收敛的级数必为发散的 .

若矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A^{(k)}$ 的所有元素 $\sum_{k=1}^{\infty}a_{ij}^{(k)}$ 均绝对收敛，则称该级数为绝对收敛 .

方阵的幂级数

A 为方阵 , $\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k, (A^0 = I)$ 称为 A 的幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 称为 A 的

Neumann 级数.

1. Neumann 级数收敛的充要条件

[定理] Neumann 级数收敛的充要条件是 A 为收敛矩阵 , 且在收敛时其和为 $(I - A)^{-1}$.

2. 收敛圆

[定理] 若矩阵 A 的特征值全部落在幂级数 $\varphi(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ 的收敛圆内，则矩阵幂级数

$$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k,(A^0=I)$$

是绝对收敛的．反之，若 A 存在落在 $\varphi(z)$ 的收敛圆外的特征值，则 $\varphi(A)$ 是发散的．

证明略．

[推论] 若幂级数在整个复平面上收敛，则对任何的方阵 $\varphi(A)$ 均收敛．

矩阵函数

如：e^A ，sinA，cosA

以矩阵为自变量的“函数”（实际上是“函矩阵”）
我们知道，

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

[性质]

$$e^{jA} = \cos A + j\sin A$$

$$\cos A = \frac{1}{2}(e^{jA} + e^{-jA})$$

$$\sin A = \frac{1}{2j}(e^{jA} - e^{-jA})$$

$$\cos(-A) = \cos A$$

$$\sin(-A) = -\sin A$$

$$\left.\begin{aligned} \cos(A \pm B) &= \cos A\cos B \mp \sin A\sin B \\ \sin(A \pm B) &= \sin A\cos B \pm \cos A\sin B \end{aligned}\right\} \leftarrow AB = BA$$

矩阵函数的初步计算

1. Hamilton-Cayley 定理

n 阶矩阵 A 是其特征多项式的零点，即令

$$\varphi(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

$$\varphi(A) = A^n + c_1 A^{n-1} + \cdots + c_{n-1}A + c_n I = 0$$

2. 零化多项式

多项式 f(z), 若 f(A)=0, 则称其为 A 的零化多项式。

由以上定理可知，方阵 A 的特征多项式为 A 的零化多项式。

利用 Jordan 标准形求矩阵函数。

(1) 求出 A 的 Jordan 标准形及变换矩阵 P ，$P^{-1}AP = J$

(2) 对于 J 的各 Jordan 块 J_i 求出，即计算 $f(J_i)$ 出

$$f(\lambda_i), f'(\lambda_i), \ldots\ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$$

并按照顺序构成 $f(J_i)$

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & f'(\lambda_i) & \frac{1}{2!}f''(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

(3) 合成

$$f(J)=\begin{bmatrix} f(J_1) & & & & \\ & f(J_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f(J_s) \end{bmatrix}$$

(4) 矩阵乘积给出

$$f(A)=Pf(J)P^{-1}$$

由此给出根据最小多项式求矩阵函数的一般方法。

(1) 求出最小多项式 $\varphi_0(\lambda)=d_n(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{m_1}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_r)^{m_r},\sum_{i=1}^{r}m_i=m$

(2) 形式上写出待定多项式 $g(\lambda)=\sum_{i=0}^{m-1}c_i\lambda^i=c_0+c_1\lambda+c_2\lambda^2+\cdots+c_{m-1}\lambda^{m-1}$

(3) 求解关于 $c_0\sim c_{m-1}$ 的线性方程组

$$g^{(k)}(\lambda_i)=f^{(k)}(\lambda_i)\quad(k=1,2,\cdots,m_i;i=1,2,\cdots,r)$$

(4) 求出 g(A)，即可得 f(A)=g(A).

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

3. 若A为实反对称矩阵（$\mathrm{A}^{\mathrm{T}} = -\mathrm{A}$），则 e^{A} 为正交矩阵。

教材中式（3.3.3）幂级数展开：

$$e^{A} = I + A + \frac{1}{2!}A^{2} + \frac{1}{3!}A^{3} + \cdots = \sum^{\infty} \frac{1}{k!}A^{k}$$

转置性质推导：对幂级数逐项取转置，

$$(e^{A})^{T} = \sum^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{k})^{T} = \sum^{\infty} \frac{1}{k!}(A^{T})^{k} = e^{A^{T}}$$

另一个关键性质：当 $AB = BA$ 时，$e^{A}e^{B} = e^{A+B}$。　　（证明正交性的核心工具）

第一步：由反对称性 $A^{T} = -A$，得转置：

$$(e^{A})^{T} = e^{A^{T}} = e^{-A}$$

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

第一步：由反对称性 $A^T = -A$，得转置：

$$(e^A)^T = e^{A^T} = e^{-A}$$

第二步：验证正交矩阵定义 $QQ^T = I$：

$$e^A(e^A)^T = e^A \cdot e^{-A}$$

$$= e^{A+(-A)} = e^O = I$$

故 e^A 满足正交矩阵定义，为正交矩阵。

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

4. 若 A 是 Hermite 矩阵，则 e^{iA} 是酉矩阵。

Hermite矩阵：$A^H = A$（共轭转置等于自身）。

矩阵指数函数的共轭转置：对幂级数逐项取共轭转置，

$$(e^B)^H = \sum^{\infty} \frac{1}{k!}(B^k)^H = \sum^{\infty} \frac{1}{k!}(B^H)^k = e^{B^H}$$

$$A = \pi r^2$$

令 $B = iA$，则 $B^H = (iA)^H = \bar{i}A^H = -\mathrm{iA}$，故

$$\left(e^{iA}\right)^H = e^{(iA)^H} = e^{-iA}$$

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

第一步：由 Hermite 性 $A^H = A$，得共轭转置：

$$\left(e^{iA}\right)^H = e^{(iA)^H} = e^{-iA}$$

第二步：验证酉矩阵定义 $QQ^H = I$：

$$e^{iA}\left(e^{iA}\right)^H = e^{iA} \cdot e^{-iA}$$

$$= e^{iA+(-iA)} = e^{O} = I$$

故 e^{iA} 满足酉矩阵定义，为酉矩阵。

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

5. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 e^A, e^{tA} $(t\epsilon R)$, $sinA$。

教材中式 (3.3.15)：矩阵幂级数的求和问题转化为求变换矩阵的问题

设矩阵幂级数 $f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k$ 收敛，且 $A=P\Lambda P^{-1}$ 可对角化，

则 $A^k=P\Lambda^k P^{-1}$，代入得：

$$f(A)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k A^k = P\begin{bmatrix} \sum c_k\lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \sum c_k\lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

即：$f(A)=P\cdot \mathrm{diag}(\mathrm{f}(\lambda_1), \mathrm{f}(\lambda_2), \cdots, \mathrm{f}(\lambda_n))\cdot \mathrm{P}^{-1}$

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

第一步：对角化。求得特征值 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$，

特征向量矩阵 P 及其逆 P^{-1}：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

对角化结果：$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{pmatrix}$ $A = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}P^{-1}$

第二步：利用对角化公式 $f(A) = P \cdot \mathrm{diag}(\mathrm{f}(\lambda_1), \mathrm{f}(\lambda_2), \mathrm{f}(\lambda_3)) \cdot \mathrm{P}^{-1}$ 计算。

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

(1) $e^{A} = P \cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{1}, \mathrm{e}^{2}) \cdot \mathrm{P}^{-1}$:

$$e^{A} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6e^{2} & 4e^{2} - 3e - e^{-1} & 2e^{2} - 3e + e^{-1} \\ 0 & 3e + 3e^{-1} & 3e - 3e^{-1} \\ 0 & 3e - 3e^{-1} & 3e + 3e^{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $e^{tA} = P \cdot \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}, \mathrm{e}^{\mathrm{t}}, \mathrm{e}^{2\mathrm{t}}) \cdot \mathrm{P}^{-1}$:

$$e^{tA} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6e^{2t} & 4e^{2t} - 3e^{t} - e^{-t} & 2e^{2t} - 3e^{t} + e^{-t} \\ 0 & 3e^{t} + 3e^{-t} & 3e^{t} - 3e^{-t} \\ 0 & 3e^{t} - 3e^{-t} & 3e^{t} + 3e^{-t} \end{pmatrix}$$

(3) $\sin A = P \cdot \mathrm{diag}(\sin(-1), \sin 1, \sin 2) \cdot \mathrm{P}^{-1}$:

$$\sin A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} \sin 2 & 4\sin 2 - 2\sin 1 & 2\sin 2 - 4\sin 1 \\ 0 & 0 & 6\sin 1 \\ 0 & 6\sin 1 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵三角函数同样通过对角化计算，$\sin A = P \cdot \mathrm{diag}(\sin\lambda_{\mathrm{i}}) \cdot \mathrm{P}^{-1}$。

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

6. 设 $f(z)=\ln z$，求 $f(A)$，这里 A 为：

(1) $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ (2) $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

教材定义 3.8 （Jordan 标准形下的矩阵函数）：

设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 标准形为 J，即可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP=J=\mathrm{diag}(J_1,J_2,\cdots,J_s)$$

其中 Jordan 块 $J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i&1&&\\&\lambda_i&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&\end{pmatrix}$

若 $f(z)$ 在 λ_i 处具有直到 m_i-1 阶导数，则定义矩阵函数 $f(A)$。

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

教材公式 (3.3.18)： Jordan 块的函数矩阵

$$f(J_i)=\begin{pmatrix} f(\lambda_i) & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}f^{(m_i-1)}(\lambda_i) \\ & f(\lambda_i) & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!}f'(\lambda_i) \\ & & & \end{pmatrix}$$

教材公式 (3.3.19)： 整个矩阵的函数

$$f(A)=P\begin{pmatrix} f(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(J_s) \end{pmatrix}P^{-1}$$

当函数 $f(z)$ 能展开为 z 的幂级数时，按此定义得到的矩阵函数，与按幂级数定义得到的是一致的。

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

(1) 小题：4 阶 Jordan 块的 $\ln A$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

对 A 求得 Jordan 标准形 J 和变换矩阵 P：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

代入公式 (3.3.18) 计算 $\ln J$ $(f(z) = \ln z,\ f'(z) = 1/z,\ f''(z) = -1/z^2,\ \ldots)$：

$$\ln J = \begin{pmatrix} \ln 1 & f'(1) & \frac{f''(1)}{2!} & \frac{f'''(1)}{3!} \\ & \ln 1 & f'(1) & \frac{f''(1)}{2!} \\ & & \ln 1 & f'(1) \\ & & & \ln 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

再由公式 (3.3.19)：$\ln A = P \cdot \ln J \cdot P^{-1}$

上讲作业：习题 3.3，3、4、5、6

(2) 小题：分块 Jordan 矩阵的 lnA $A=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$

A 本身就是分块对角形式：$A=\mathrm{diag}(J_1,J_2)$

$$J_1=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix},\quad J_2=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

分别计算两个 Jordan 块的函数：

$$\ln J_1=\begin{pmatrix}\ln 2&\frac{1}{2}\\0&\ln 2\end{pmatrix},\quad \ln J_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

再由公式 (3.3.19) 组合：

$$\ln A=\begin{pmatrix}\ln J_1&\\&\ln J_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln 2&\frac{1}{2}&0&0\\0&\ln 2&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵微分方程及矩阵三角分解

- 矩阵微分方程
- 矩阵的微分和积分

  —阶线性齐次常微分方程组

  —阶线性非齐次常微分方程组

- 矩阵的三角分解

  Gauss 消元法的矩阵形式

  LU 分解与 LDU 分解

  其他三角分解

1. 矩阵导数定义：若矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每一个元素 $a_{ij}(t)$ 是变量 t 的可微函数，则称 A(t) 可微，其导数定义为

$$\frac{dA}{dt}=A'(t)=\left(\frac{da_{ij}}{dt}\right)_{m\times n}$$

由此出发，函数可以定义高阶导数，类似地，又可以定义偏导数。

2. 矩阵导数性质：若 A(t),B(t) 是两个可进行相应运算的可微矩阵，则

（1）$\frac{d}{dt}[A(t)\pm B(t)]=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt}$

（2）$\frac{d}{dt}[A(t)B(t)]=\frac{dA}{dt}B+A\frac{dB}{dt}$

（3）$\frac{d}{dt}[a(t)A(t)]=\frac{da}{dt}A+a\frac{dA}{dt}$

（4）$\frac{d}{dt}(e^{tA})=Ae^{tA}=e^{tA}A$　　$\frac{d}{dt}(\cos(tA))=-A\sin(tA)$

$\frac{d}{dt}(\sin(tA))=A\cos(tA)$

(*A* 与 *t* 无关)

证明（4）：

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}) = \frac{d}{dt}(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots) = A + tA^2 + \frac{1}{2!}t^2A^3 + \cdots$$

$$= A(I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots) = Ae^{tA}$$

$$= (I + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \cdots)A = e^{tA}A$$

3. 矩阵积分定义：若矩阵 $A(t)=(a_{ij}(t))_{m\times n}$ 的每个元素 $a_{ij}(t)$ 都是区间 $[t_0,t_1]$ 上的可积函数，则称 A(t) 在区间 $[t_0,t_1]$ 上可积，并定义 A(t) 在 $[t_0,t_1]$ 上的积分为

$$\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}a_{ij}(t)dt\right)_{m\times n}$$

4. 矩阵积分性质

（1） $$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)\pm B(t)]dt=\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\pm\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt$$

（2） $$\int_{t_0}^{t_1}[A(t)B]dt=\left(\int_{t_0}^{t_1}A(t)dt\right)B,\ \int_{t_0}^{t_1}[AB(t)]dt=A\left(\int_{t_0}^{t_1}B(t)dt\right)$$

（3） $$\frac{d}{dt}\int_a^t A(t')dt'=A(t),\ \int_a^b A'(t)dt=A(b)-A(a)$$

一阶线性齐次常系数常微分方程组

设有一阶线性齐次常系数常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

式中 t 是自变量，$x_i = x_i(t)$ 是 t 的一元函数$(i = 1, 2, \cdots, n)$，

$a_{ij}(i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 是常系数。

令 $x(t)=[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)]^T$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

则原方程组变成如下矩阵方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax(t)$$

其解为

$$x(t)=e^{tA}x(0)=e^{tA}c \quad \xrightarrow{\text{更一般的}} \quad x(t)=e^{(t-t_0)A}x(t_0)$$

对该解求导，可以验证

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{tA}c = Ax(t)$$ 且 $t = 0$ 时，

$$x(t) = e^{0A}c = Ic = c = x(0)$$

表明 $x(t)$ 确为方程的解，积分常数亦正确

例：求解微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 \end{cases}$$

初始条件为

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

解：

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \qquad f(A)=e^{tA} \rightarrow f(\lambda)=e^{t\lambda}$$

（1）求出 *A* 的特征多项式，

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda^2+1)=(\lambda-j)(\lambda+j) \qquad j=\sqrt{-1}$$

$$\lambda_1=j, m_1=1; \lambda_2=-j, m_2=1$$

（2） 定义待定系数的多项式 $g(\lambda)=c_0+c_1\lambda$

（3） 解方程

$$g(\lambda_1)=f(\lambda_1)=e^{jt}=\cos t+j\sin t=c_0+jc_1$$

$$g(\lambda_2)=f(\lambda_2)=e^{-jt}=\cos t-j\sin t=c_0-jc_1$$

$$\begin{cases} c_0=\cos t \\ c_1=\sin t \end{cases}$$

（4）

$$g(A)=c_0I+c_1A=\begin{bmatrix}\cos t & 0\\ 0 & \cos t\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \sin t\\ -\sin t & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$$

$$=f(A)=e^{tA}$$

$$x(t)=e^{tA}x(0)=\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1\cos t+r_2\sin t\\ r_2\cos t-r_1\sin t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}$$

一阶线性非齐次常系数常微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1(t) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2(t) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_n(t) \end{cases}$$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)]^T$$

$$b(t) = [b_1(t), b_2(t), \cdots, b_n(t)]^T$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

方程组化为矩阵方程

$$\frac{dx}{dt} = Ax + b$$

采用常数变易法求解之；齐次方程的解为 $e^{tA}c$ ，可设非齐次方程的解为 $e^{tA}c(t)$ ，

代入方程，得：

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{tA})c(t)+e^{tA}\frac{dc}{dt}=Ax(t)+e^{tA}\frac{dc}{dt}=Ax(t)+b(t) \quad \rightarrow \quad \frac{dc}{dt}=e^{-tA}b(t)$$

$$c(t)=\int^{t} e^{-st}b(s)ds$$

可验证 $c(t)$ 是解。加上初始条件，有

$$x(t)=e^{tA}[x(0)+\int_0^{t} e^{-sA}b(s)ds]$$

说明：高阶常微分方程常常可以化为一阶常微分方程组来处理，

如：

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f$$

令 $x_1=y, x_2=\frac{dy}{dt}$ ，则可得

$$\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=x_2\\ \frac{dx_2}{dt}=\frac{1}{a}(f-cx_1-bx_2)=-\frac{c}{a}x_1-\frac{b}{a}x_2+\frac{f}{a}\end{cases}$$

一般地， n 阶常微分方程可以化为 n 个一阶常微分方程组成的方程组。

矩阵的三角分解

Gauss 消元法的矩阵形式

n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \cdots + a_{1n}\xi_n = b_1 \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \cdots + a_{2n}\xi_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \cdots + a_{nn}\xi_n = b_n \end{cases} \rightarrow \quad Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} A = (a_{ij}) \\ x = [\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n]^T \\ b = [b_1, b_2 \cdots b_n]^T \end{pmatrix}$$

设 $A_0 = A = (a_{ij})_{n\times n}$，设 A 的 k 阶顺序主子式为 Δ_k ，

若 $\Delta_1 = a_{11}^{(0)} \neq 0$ ，可以令 $c_{i1} = \dfrac{a_{i1}^{(0)}}{a_{11}^{0}}$

并构造 Frobenius 矩阵

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \rightarrow \quad L_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ -c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -c_{n1} & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

计算可得

$$A^{(1)}=L_1^{-1}A^{(0)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{(0)}=L_1A^{(1)}$$

初等变换不改变行列式，故 $\Delta_2=a_{11}^0a_{22}^1$ ，若 $\Delta_2\neq 0$，则 $a_{22}^1\neq 0$ ，又可定义

$$c_{i2}=\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}(i=3,4,\cdots n)$$

并构造 Frobenius 矩阵

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & c_{32} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & c_{n2} & & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad L_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -c_{32} & \ddots & \\ & \vdots & & \\ & -c_{n2} & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(2)} = L_2^{-1} A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & a_{13}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3n}^{(2)} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & a_{n3}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{(1)} = L_2 A^{(2)}$$

依此类推，进行到第 (r-1) 步，则可得到

$$A^{(r-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r-1}^{(0)} & a_{1r}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & a_{r-1r-1}^{(r-2)} & a_{r-1r}^{(r-2)} & \cdots & a_{r-1n}^{(r-2)} \\ & & & a_{rr}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr}^{(r-1)} & \cdots & a_{nn}^{(r-1)} \end{bmatrix} \quad (r=2,3,\ ,n-1)$$

则 A 的 r 阶顺序主子式 $D_r=a_{11}^{(0)}a_{22}^{(1)}\cdots a_{r-1r-1}^{(r-2)}a_{rr}^{r-1}$，若 $D_r\neq 0$ $a_{rr}^{r-1},\neq 0$

则 可定义 $c_{ir}=\dfrac{a_{ir}^{r-1}}{a_{rr}^{r-1}}$，并构造 Frobenius 矩阵

$$L_r = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & c_{r+11} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & c_{nr} & & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad L_r^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -c_{r+11} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -c_{nr} & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{(r)} = L_r^{-1} A^{r-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & \cdots & a_{1r}^{(0)} & a_{1r+1}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \\ & & a_{rr}^{(r-1)} & a_{rr+1}^{(r-1)} & \cdots & a_{rn}^{(r-1)} \\ & & & a_{r+1r+1}^{(r)} & \cdots & a_{r+1n}^{(r)} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{nr+1}^{(r)} & \cdots & a_{nn}^{(r)} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{(r-1)} = L_r A^{(r)}$$

$$(r = 2,3,,n-1)$$

直到第（n－1）步，得到

$$A^{(n-1)}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{n-1} \end{bmatrix}$$

则完成了消元的过程

而消元法能进行下去的条件是 $\Delta_r \neq 0$ （r＝1,2, ,n-1）

LU 分解与 LDU 分解

$$A = A^{(0)} = L_1 A^{(1)} = L_1 L_2 A^{(2)} = \cdots = L_1 L_2 L_3 \cdots L_{n-1} A^{(n-1)}$$

容易求出

$$L = L_1 L_2 \cdots L_{n-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ c_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{n-11} & c_{n-12} & & 1 \\ c_{n1} & c_{n2} & & c_{nn-1} \quad 1 \end{bmatrix}$$

为下三角矩阵

令 $U = A^{(n-1)}$ 为上三角矩阵，则 $A = LU$

（L: lower U: upper L: left R: right）

以上将 A 分解成一个单位下三角矩阵与上三角矩阵的乘积，就称为 LU 分解或 LR 分解。

LU 分解不唯一，显然，令 D 为对角元素不为零的 *n* 阶对角阵，则

$$A = LU = LDD^{-1}U = \hat{L}\hat{U}$$

可以采用如下的方法将分解完全确定，即要求

（1） L 为单位下三角矩阵 或

（2） U 为单位上三角矩阵 或

（3）将 A 分解为 LDU ，其中 L ， U 分别为单位下三角，单位上三角矩阵， D 为对角阵 $A = diag[d_1 \cdots d_n]$ ，而 $d_k = \Delta_k / \Delta_{k-1}$ （k=1,2,...n ） ， $\Delta_0 = 1$ ，

n 阶非奇异矩阵 A 有三角分解 LU 或 LDU 的充要条件是 A 的顺序主子式 $\Delta_r \neq 0$ （r=1,2 ， ,n ）

n 个顺序主子式全不为零的条件实际上是比较严格的，特别是在数值计算中，$a_{kk}^{(k-1)}$ 很小时可能会带来大的计算误差。因此，有必要采取选主元的消元方法，这可以是列主元（在 $a_{kk}^{(k-1)}$，$a_{k+1,k}^{(k-1)}$，…，$a_{nk}^{(k-1)}$ 中选取模最大者作为新的 $a_{kk}^{(k-1)}$）、行主元（在 $a_{kk}^{(k-1)}$，$a_{kk+1}^{(k-1)}$，…，$a_{kn}^{(k-1)}$ 中选取模最大者作为新的 $a_{kk}^{(k-1)}$）全主元（在所有 $a_{ij}^{(k-1)}$（$i,j=k,k+1,\cdots,n$）中选模最大者作为新的 $a_{kk}^{(k-1)}$）。之所以这样做，其理论基础在于对于任何可逆矩阵 A，存在置换矩阵 P 使得 PA 的所有顺序主子式全不为零。

列主元素法：在矩阵的某列中选取模值最大者作为新的对角元素，选取范围为对角线元素以下的各元素。比如第一步：找第一个未知数前的系数 $|a_{i1}|$ 最大的一个，将其所在的方程作为第一个方程，即交换矩阵的两行，自由项也相应变换；第二步变换时，

找 $|a_{i2}|(i \leq 2)$ 中最大的一个，然后按照第一步的方法继续。

- 行主元素法：在矩阵的某行中选取模值最大者作为新的对角元素，选取范围为对角线元素以后的各元素，需要记住未知数变换的顺序，最后再还原回去。因此需要更多的存储空间，不如列主元素法方便。
- 全主元素法：若某列元素均较小或某行元素均较小时，可在各行各列中选取模值最大者最为对角元素。与以上两种方法相比，其计算稳定性更好，精度更高，计算量增大。

$$Ax = b$$

$$A = LU$$

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \leftarrow \text{两个三角形方程回代即可}$$

其他三角分解

1. 定义 设 A 具有唯一的 LDU 分解

(1) 若将 D， U 结合起来得 $\hat{L}=L\hat{U}$（$\hat{U}=DU$），则称为 A 的 Doolittle 分解

$$A=L\hat{U}$$

(2) 若将 L， D 结合起来得 $\hat{L}=LD$（　　），则称为 A 的 Crout 分解

2. 算法

(1)Crout 分解，设

$$\hat{L}=\begin{bmatrix} l_{11} & & & \\ l_{21} & l_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad U=\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & \cdots & u_{3n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

由 $A = \hat{L}U$ 乘出得

(1) $l_{i1} = a_{i1}$ (第1列) （$i = 1, 2, 3, \cdots n$） ($A, \hat{L}$ 第1列)

(2) $u_{1j} = a_{1j} / l_{11}$ (第1行) （$j = 2, 3, \cdots n$） (A, U第1行)

(3) $l_{i2} = a_{i2} - l_{i1}u_{12}$ (第2列) ($i = 2, 3, \cdots n$) ($A, \hat{L}$ 第2列)

(4) $u_{2j} = \frac{1}{l_{22}}(a_{2j} - l_{21}u_{1j})$ （$j = 3, 4, \cdots n$） (A, U第2行)

5. 一般地，对 $A, \hat{L}$ 的第 k 列运算，有

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im}u_{mk} \qquad (k = 1, 2, \cdots n; i = k+1, k+2; \cdots n)$$

6. 对 A ， U 的第 k 行运算，有

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}}(a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km}u_{mj}) \qquad (k = 1, 2, \cdots n-1; j = k+1, k+2, \cdots n)$$

直至最后，得到的 l_{ij}, u_{ij} 恰可排成

$$\begin{bmatrix} l_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & & l_{nn} \end{bmatrix}$$

先算列后算行

3. 厄米正定矩阵的 Cholesky 分解

$$A = GG^H$$

$$g_{ij} = \begin{cases} \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} |g_{ik}|^2 \right)^{1/2} & i = j \\ \frac{1}{g_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} \overline{g_{ik}} \right) & i > j \\ 0 & i < j \end{cases}$$

理论上， Cholesky 具有中间量 g_{ij} 可以控制 $|g_{ij}| \left(\leq \sqrt{|a_{ii}|} \right)$ 的好处，应较稳健，但实际计算中发现，对希尔伯特矩阵问题，不如全主元方法。

作业：

P170-171 5、9

P177 3、4

P195 2、3